JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 46, 777–819 (1974)

Sur $\square u + u^3 = f$ dans un Domaine Noncylindrique

ATSUSHI INOUE

Department of Mathematics, University of Tokyo, Tokyo, Japan

Submitted by J. L. Lions

1. INTRODUCTION

Considérons le problème mixte suivant:

$$\begin{aligned} \square u(x,t) + u(x,t)^3 &= f(x,t) &\quad& \text{dans} \quad \{x \in \Omega(t), 0 < t < T\}, \\ u(x,0) &= u_0(x) && \\ && & \text{sur} \quad x \in \Omega(0), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) &= u_1(x) && \\ u(x,t) &= 0 && \text{sur} \quad x \in \partial\Omega(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Pour chaque t, $\Omega(t)$ est un domaine borné ou nonborné dans $\mathbf{R}^3$ de frontière $\partial\Omega(t)$ assez régulière. $\Omega(t)$ varie "bien" par rapport à t.

Nous étudions les problèmes suivants:

(1) Sous quelles conditions sur $\Omega(t)$, pouvons nous construire une solution classique du problème (1.1) pour des données initiales $[u_0(x), u_1(x), f(x,t)]$ "convenables"?

(2) Est-ce que le problème (1.1) est bien posé dans $\mathscr{E}^\infty$?

(3) Si le domaine $\Omega(t)$ tend vers des domaines $\Omega^\pm$ lorsque $t \to \pm\infty$, en un sens "convenable," alors la solution de (1.1), est-elle "près" des solutions de (1.1) avec $\Omega^\pm$ au lieu de $\Omega(t)$?

(4) Si le domaine $\Omega(t)$ change périodiquement, est-ce qu'il existe une solution périodique par rapport à t?

Nos réponses sont affirmatives aux problèmes (1) et (2) si nous supposons que le vecteur normal à la frontière latérale n'est pas dans le cône d'onde.

Concernant au problème (3), nous avons une réponse affirmative quand il n'y a pas de terme nonlinéaire [9, 10].

Plus précisément, nous supposons les conditions suivantes.

Hypothesis 1. $\Omega(t)$ a une frontière $\partial\Omega(t)$ régulière et les ensembles ouverts $\Omega(t)$ sont isomorphes entre eux.

Hypothesis 2. $\partial_L\tilde{\Omega}_T = \bigcup_{0<t<T} \partial\Omega(t)$ est une variété régulière et le vecteur normale à la frontière latérale $\partial_L\tilde{\Omega}_T$ n'est pas dans le cône d'onde. (On définit $\tilde{\Omega}_T = \bigcup_{0<t<T} \Omega(t)$.)

Alors, nous avons les théorèmes suivants.

THÉORÈME A. *Il n'existe qu'une solution appartenant à $\mathscr{E}^2(\tilde{\Omega}_T)$ du problème* (1.1).

THÉORÈME B. *Si les données initiales*

$$[u_0(x), u_1(x), f(x, t)] \in \mathscr{E}^\infty(\Omega(0)) \times \mathscr{E}^\infty(\Omega(0)) \times \mathscr{E}^\infty(\tilde{\Omega}_T)$$

satisfont à la condition de compatibilité d'ordre ∞, alors il existe une solution $u(x, t) \in \mathscr{E}^\infty(\tilde{\Omega}_T)$ du problème (1.1).

COROLLAIRE. *Supposons que $\Omega(t) = \Omega$. Si les données initiales*

$$[u_0(x), u_1(x), f(x, t)] \in H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega \times (0, T))$$

satisfont à la condition de compatibilité d'ordre l, alors il existe une solution $u(x, t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$ de (1.1) *et elle est unique dans $\bigcap_{k=0}^{2} \mathscr{E}_t^k(H^{2-k}(\Omega))$. (Si $\partial\Omega$ n'est pas compact, nous supposons que $\partial\Omega$ soit "régulière uniformément de classe C^∞"* [2].)

THÉORÈME C. *Le problème* (1.1) *est bien posé dans $\mathscr{E}^\infty$: Soient $u(x, t)$ et $v(x, t)$ des solutions du problèmes* (1.1) *correspondant respectivement aux données initiales $[u_0(x), u_1(x), f(x, t)]$ et $[v_0(x), v_1(x), g(x, t)]$.*

Quels que soient K, un ensemble compact dans $\tilde{\Omega}_T$, un entier $m \geqslant 0$, des constantes $C > 0$ et $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $\tilde{K}$, un entier $N > 0$, et un constante $\delta > 0$ tels que si les données initiales satisfont aux inégalités suivantes,

$$\begin{aligned}
&|u_0(x)|_{\mathscr{E}^{N+2}(\tilde{K}_0)} + |u_1(x)|_{\mathscr{E}^{N+1}(\tilde{K}_0)} + |f(x, t)|_{\mathscr{E}^{N+1}(\tilde{K})} + |v_0(x)|_{\mathscr{E}^{N+2}(\tilde{K}_0)} \\
&\qquad + |v_1(x)|_{\mathscr{E}^{N+1}(\tilde{K}_0)} + |g(x, t)|_{\mathscr{E}^{N+1}(\tilde{K})} \leqslant C
\end{aligned}$$

et (1.2)

$$|u_0(x) - v_0(x)|_{\mathscr{E}^{N+2}(\tilde{K}_0)} + |u_1(x) - v_1(x)|_{\mathscr{E}^{N+1}(\tilde{K}_0)} + |f(x, t) - g(x, t)|_{\mathscr{E}^{N+1}(\tilde{K})} \leqslant \delta,$$

alors nous avons

$$| u(x, t) - v(x, t)|_{\mathscr{E}^m(K)} \leqslant \epsilon, \qquad où \qquad \tilde{K}_0 = \tilde{K} \cap (\Omega(0) \times \{0\}) \quad (1.3)$$

(δ *dépend de* C, ϵ, *et* $\tilde{K} \cap \partial_L \tilde{\Omega}_T$.)

Remarque 1. Les espaces fonctionelles seront données à la Section 2.

Remarque 2. Si une fonction vérifie $u(x, t) \in \mathscr{E}^m(\tilde{\Omega}_T)$ et $u(x, t) = 0$ sur $\partial_L \tilde{\Omega}_T$, alors nous avons $X(x, t)^l u(x, t) = 0$ sur $(x, t) \in \partial_L \tilde{\Omega}_T$. $l \leqslant m$ où $X(x, t)$ est un champ de vecteur tangentiel à $\partial_L \tilde{\Omega}_T$. Donc, si $u(x, t)$ est une solution de (1.1) appartenant à $\mathscr{E}^m(\tilde{\Omega}_T)$, alors nous avons $X(x, 0)^l u(x, 0) = 0$ $x \in \partial\Omega(0)$, $l \leqslant m$. En représantant cette relation par les données initiales, nous avons la condition de compatibilité d'ordre m. La condition plus concrète sera donnée aux Sections 4 et 7.

Premièrement, l'équation (1.1) avec $\Omega(t) = \Omega$ a été donnée comme une équation modèle pour la théorie relativistique de la mécanique quantique.

En 1961, Jörgens [12] a démontré l'existence globale de la solution classique pour $\Omega(t) = \mathbf{R}^3$. Browder [3] a traité la théorie de Jörgens sous une forme abstraite.

En 1966, Sather [18] nous a donné l'existence globale de la solution pour $\Omega(t) = \Omega$ *borné*, par méthode de Galerkin. Le corollaire du Théorème B est une extension des résultats de Sather. (Il a introduit vaguement l'idée de compatibilité.)

D'autre part, récemment, Cooper et Bardos [4] ont étudié le problème (1.1) quand $\tilde{\Omega}_T$ est isomorphe par une transformation "hyperbolique" à un ensemble "monotone croissant en t". Ils ont démontré l'existence de la solution "faible" par méthode de pénalisation de Lions [14]. Et puis, Cooper et Medeiros [5] ont démontré en employant le lemme de Strauss [21] que la solution obtenue dans [4] est "forte."

Sommaire. À la Section 2, nous introduisont des espaces fonctionels et aussi une transformation qui transforme *localement* le problème (1.1) en un problème aux coefficients variables dans un domaine cylindrique. À la Section 3, nous établissons les inégalités d'énergie pour le problème $L(x, t; \partial/\partial t, \ \partial/\partial x)\, u(x, t) + u(x, t)^3 = f(x, t)$ dans un domaine fixé où l'opérateur L a des coefficients variables. Et puis, à la Section 4, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème posé à la Section 3. Nous démontrons le domaine d'influence pour le même problème à la Section 5. À la Section 6, nous étudions les propriétés de $u(x, t)$, solution de (1.1). C'est-à-dire, nous démontrons qu'elle a le domaine d'influence. C'est la Section 7 qui joue le role principal dans cet article. Nous démontrons l'existence de la solution du problème (1.1) en employant les résultats des Sections

2–6. Car notre méthode est de localiser le problème, il est nécessaire d'avoir une certaine uniformité. Ceci sera établi par lemme de Lebesgue (Lemme 7.3).

À la Section 8, nous étudions comment les constantes de l'inégalité d'énergie dépendent des coefficients de l'opérateur L. En employant les résultats de la Section 8 et la méthode de la Section 7, nous démontrons le Théorème C à la Section 9.

Les résultats dans cet article ont été énoncé dans [11].

I. Existence

2. *Préliminaires*

2.1. *Les Espaces Fonctionnels*

Soit Ω un domaine dans $\mathbf{R}^3$. Les points ont pour coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$. Nous posons

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3}, \qquad \text{où} \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{et} \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

mais nous utiliserons souvent aussi respectivement, u_{x_i}, u_t au lieu de $D_i u$, $D_t u$.

Nous supposons toujours dans cet article que toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace de Banach des fonctions définies sur Ω, de puissance p-ième sommable. La norme est donné par

$$\| u \|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega | u(x) |^p \, dx,$$

où $dx = dx_1 \, dx_2 \, dx_3$. On utilisera la notation $\| u \| = \| u \|_0 = \| u \|_{L^2(\Omega)}$.

$H^l(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions définies sur Ω, de carrés sommables et ayant, au sens de la théorie des distributions, des dérivées d'ordre moins que l qui sont des éléments de $L^2(\Omega)$ avec la norme

$$\| u \|_l^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \| D^\alpha u \|_0^2, \qquad \text{où} \qquad | \alpha | = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 .$$

$\mathring{H}^l(\Omega)$ signifie la fermeture de l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^l(\Omega)$. ($\mathscr{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions définies sur Ω, infiniment dérivables de support compact.)

$\mathscr{E}^m(\omega)$ désigne l'espace des fonctions définies sur ω, ouvert dans $\mathbf{R}^4$ (ou $\mathbf{R}^3$), m-fois continûment dérivables.

$\mathscr{E}^m(K)$ désigne l'espace des fonctions définies sur un ensemble compact K, m-fois continûment dérivables et avec la norme $|\cdot|_{\mathscr{E}^m(K)}$. C'est un espace de Banach

$$\left(|u|_{\mathscr{E}^m(K)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in K} |D^\alpha u(x)|\right).$$

$\mathscr{B}^m(\tilde{Q}_T)$ désigne un sous-espace de $\mathscr{E}^m(\tilde{Q}_T)$ qui est un ensemble des fonctions ayant toutes les dérivées d'ordre moins que m bornées sur $\tilde{Q}_T$, où $\tilde{Q}_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$.

$\mathscr{E}_t^k([0, T]; X)$ désigne l'espace des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans un espace de Banach X, k-fois continûment dérivables dans X. Pour simplifier l'écriture, on écrite $\mathscr{E}_t^k(X)$ au lieu de $\mathscr{E}_t^k([0, T]; X)$.

Pour deux sous-ensembles ouverts ω_1, ω_2 de $\mathbf{R}^4$, nous définissons l'espace $\mathscr{B}^n(\omega_1, \omega_2)$ comme l'espace des transformations $\Phi(x, t)$ de ω_1 à valeurs dans ω_2, n-fois continûment dérivables vérifiant la majoration:

$$\|\Phi\|_{\mathscr{B}^n(\omega_1,\omega_2)} = \sup_{\substack{|\alpha|+\gamma\leqslant n\\ (x,t)\in\omega_1\\ i=1,2,3,4}} |D^\alpha D_t^\gamma \varphi_i(x, t)|,$$

où

$$\Phi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t), \varphi_3(x, t), \varphi_4(x, t)).$$

2.2. *Le Changement de Variables*

Considérons une transformation préservant des niveaux, $(y, s) = \Phi(x, t)$. Plus précisément, Φ est donnée par $y_j = \varphi_j(x, t)$, $j = 1, 2, 3$ et $s = t$.

Nous avons facilement,

$$\begin{aligned} L &= (L(x, t; D_t, D_{x_i})) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial y_j\,\partial s} + \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_k^2}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

DÉFINITION 2.1. Nous disons qu'une transformation Φ est HR (hyperbolique régulière), s'il existe une constante $\delta_{\mathrm{HR}} > 0$ telle que

$$\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\xi_j\right)^2 - \left\{\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right)\xi_i\xi_j\right\} \geqslant \delta_{\mathrm{HR}}\,|\xi|^2 \tag{2.2}$$

$\forall(x, t) \in \operatorname{dom}\Phi$ et $\forall\xi \in \mathbf{R}^3$, où $\operatorname{dom}\Phi$ signifie le domaine de la transformation Φ.

DÉFINITION 2.2. Si une transformation Φ satisfait à

$$\sum_{i,j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\right)\xi_i\xi_j\geqslant\delta_E\mid\xi\mid^2,\tag{2.3}$$

où δ_E est une constante positive, indépendante de ξ et $(x, t)\subseteq \operatorname{dom}\Phi$, alors nous disons que Φ appartient à la classe (E).

Soit un domaine noncylindrique $\tilde{\Omega}_T$ donné par

$$\tilde{\Omega}_T=\bigcup_{0<t<T}(\Omega(t)\times\{t\})\subset\mathbf{R}^3\times(0, T),$$

et soit la frontière latérale donnée par

$$\partial_L\tilde{\Omega}_T=\bigcup_{0<t<T}(\partial\Omega(t)\times\{t\}).$$

Désormais, nous supposons toujours que les ensembles ouverts $\Omega(t)$ sont difféomorphes entre eux et que $\partial_L\tilde{\Omega}_T$ est une variété régulière.

DÉFINITION 2.3. On dit que un domaine noncylindrique $\tilde{\Omega}_T$ satisfait à la condition supplémentaire (S) par rapport à $\square$, si l'angle $\theta(x, t)$ entre les deux vecteurs $(0, 0, 0, 1)$ et $\mathbf{n}(x, t)$ satisfait à

$$\frac{\pi}{4}<\theta(x, t)<\frac{3\pi}{4},$$

où $\mathbf{n}(x, t)$ désigne la normale extérieure unitaire de $\partial_L\tilde{\Omega}_T$ au point $(x, t)\in\partial_L\tilde{\Omega}_T$; i.e., $\mathbf{n}(x, t)$ satisfait à l'inégalité

$$|\langle(0, 0, 0, 1), \mathbf{n}(x, t)\rangle|<\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\forall(x, t)\in\partial_L\tilde{\Omega}_T,\tag{2.4}$$

où $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbf{R}^4$.

Remarque 2.4. La condition (S) signifie que "le vecteur normale à la frontière latérale n'est pas dans le cône d'onde."

PROPOSITION 2.5. *Supposons que $\tilde{\Omega}_T$ ait les propriétés ci-dessus. Alors, pour chaque point $(x, t)\in\partial_L\tilde{\Omega}_T$, il existe un voisinage $V_{(x,t)}$ et une transformation $\Phi\in(E)$ qui transforme $V_{(x,t)}$ en un voisinage $\tilde{V}_{(0,0)}$ de $(0, 0)$ de l'espace $\{(y, s); y_3>0\}$.*

Démonstration. Par translation, nous supposons que $(x, t)=(0, 0)$ sans diminuer la généralité. Et puis, par rotation de coordonnées en x, nous pouvons prendre l'axe x_3 égale à la normale intérieure de $\Omega(0)$ au point $x=0$.

En employant le théorème de fonction implicite, si c'est nécessaire, nous pouvons démontrer qu'il existe une fonction $l(x_1, x_2, t)$ et un voisinage V de (0, 0) tel que $\partial_L\tilde{\Omega}_T \cap V$ soit décrit par la relation $x_3 = l(x_1, x_2, t)$. Nous remarquons ici que (i) $l(0, 0, 0) = 0$, (ii) par choix de axes en x,

$$l_{x_1}(0, 0, 0) = l_{x_2}(0, 0, 0) = 0,$$

et (iii) $l(x_1, x_2, t) \in \mathscr{E}^\infty(V)$.

En définissant la transformation Φ comme

$$\Phi:\quad \begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3 - l(x_1, x_2, t), \\ s &= t, \end{aligned} \tag{2.5}$$

et

nous avons

$$\begin{aligned} \square \mapsto L = \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2l_s \frac{\partial^2}{\partial y_3\, \partial s} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2} + (1 + l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2 - {l_s}^2) \frac{\partial^2}{\partial {y_3}^2} \right. \\ \left. - 2l_{y_1} \frac{\partial^2}{\partial y_1\, \partial y_3} - 2l_{y_2} \frac{\partial^2}{\partial y_2\, \partial y_3} \right\} + (l_{ss} - l_{y_1y_1} - l_{y_2y_2}) \frac{\partial}{\partial y_3}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$l_s = \frac{\partial}{\partial s} l(y_1, y_1, s), \ldots, \text{etc.}$$

Car $\mathbf{n}(x, t)$ est représenté dans $\partial_L\tilde{\Omega}_T \cap V$ par

$$\mathbf{n}(x, t) = \frac{\pm 1}{(1 + l_{x_1}^2 + l_{x_2}^2 + {l_t}^2)^{1/2}} (-l_{x_1}, -l_{x_2}, 1, -l_t), \tag{2.7}$$

il est évident que la condition (S) implique que

$$1 + l_{x_1}^2 + l_{x_2}^2 - {l_t}^2 > 0. \tag{2.8}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + (1 + l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2 - {l_s}^2)\, {\xi_3}^2 - 2l_{y_1}\xi_1\xi_3 - 2l_{y_2}\xi_2\xi_3 \\ &\quad \geqslant {\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + (1 + l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2 - {l_s}^2)\, {\xi_3}^2 - (l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2)^{1/2} ({\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + {\xi_3}^2), \end{aligned} \tag{2.9}$$

grâce aux propriétés (i)–(iii) de $l(y_1, y_2, s)$ et $1 - l_s^2(0, 0, 0) > 0$, si on choisit un voisinage $\tilde{V}'$ plus petit que V, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + (1 + l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2 - l_s^2)\, \xi_3^2 - 2l_{y_1}\xi_1\xi_2 - 2l_{y_2}\xi_2\xi_3 \geqslant \delta \mid \xi \mid^2 \quad (2.10)$$

pour $\forall \xi \in \mathbf{R}^3$ et $(y_1, y_2, s) \in \tilde{V}'$.

En posant $\tilde{V}_{(0,0)} = \tilde{V}'$ et $V_{(0,0)} = \Phi^{-1} \cdot V'$, on a le résultat désiré.

Q.E.D.

Ici, nous donnons des exemples.

Exemple 1. Soit $\Omega(t)$ donné par $\{(x, t); L(x, t) < 0\}$ ou $\{(x, t); L(x, t) > 0\}$, où

$$L(x, t) = \sum_{i=1}^{3} (a_i x_i - b_i t)^2 - 1, \quad (2.11)$$

où $a_i > 0$ et b_i sont constantes.

Si on suppose que

$$1 - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2 > 0, \quad (2.12)$$

alors par transformation $\Phi = \varphi_i(x, t) = a_i x_i - b_i t\}$ appartenant à la classe (E), le domaine noncylindrique $\tilde{\Omega}_T$ est isomorphe à $\Omega(0) \times (0, T)$.

Exemple 2. Soit $L(x, t)$ définie par

$$L(x, t) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - (1 + \exp(-at^b))^2 > 0, \quad (2.13)$$

où $a > 0$ et $b > 0$.

Si on suppose que

$$1 - a^2b^2t^{2(b-1)} \exp(-2at^b) > 0, \quad (2.14)$$

alors par transformation

$$\Phi = \{\varphi_i(x, t) = (1 + \exp(-2at^b))^{-1}\, x_i\} \in (E),$$

$\tilde{\Omega}_T$ est isomorphe à $\Omega(0) \times (0, T)$.

3. *L'Estimation à Priori pour Ω Fixé*

Soit Ω un domaine *borné* dans $\mathbf{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ indéfiniment régulière. Soit $u(x, t)$ une solution du problème suivant:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a_1(x, t\colon D)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a_2(x, t\colon D)\, u(x,t) + q(x,t)\, u(x,t)^3 = f(x,t),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \qquad \text{et} \qquad u(x,t)\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.1}$$

où

$$a_1(x, t\colon D) = 2\sum_{j=1}^{3} h_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + h(x,t)$$

et (3.2)

$$a_2(x, t\colon D) = -\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{3} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,t).$$

Désormais, nous utiliserons u ou $u(t)$ au lieu de $u(x, t)$. Supposons que

(a) tous les coefficients appartiennent à $\mathscr{E}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$;

(b) $a_2(x, t; D)$ soit un opérateur elliptique satisfaisant à

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geqslant \delta_1\,|\,\xi\,|^2, \qquad \delta_1 > 0$$

$$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \tag{3.3}$$

pour tous $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$ et $\xi \in \mathbf{R}^3$, et que

(c) $q(x, t) \geqslant \delta_2 > 0$ pour $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$.

Remarque 3.1. Par Proposition 2.5, si $\tilde{\Omega}_T$ satisfait à la condition (S), le problème (1.1) dans $V_{(x,t)}$ se réduit au problème (3.1) avec les hypothèses (a)–(c) en prenant Ω convenablement.

Par la suite, nous écrirons (3.1) à nouveaux sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\,U(t) = A(t)\,U(t) + N(t)\,U(t) + F(t), \tag{3.4}$$

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -a_2(x, t\colon D), & -a_1(x, t\colon D) \end{bmatrix},$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \qquad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

et

$$N(t)\,U(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -q(t)\,u(t)^3 \end{bmatrix}.$$

Nous utiliserons la notation $U(t) = \{u(t), v(t)\}$ au lieu de celle de ci-dessus.

D'abord, introduisons un espace $\mathscr{H}(t)$. $\mathscr{H}(t)$ est $\mathring{H}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ avec la norme

$$\| U \|_{\mathscr{H}(t)}^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left(a_{ij}(t) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (u, u) + (v, v), \tag{3.5}$$

où

$$U = \{u, v\} \in \mathring{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Sous la condition de Dirichlet (i.e., $u |_{\partial\Omega} = 0$), il est clair que $A(t)$ est l'opérateur de domaine

$$D(A(t)) = \mathbf{D}, \qquad \text{où} \qquad \mathbf{D} = (H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \times \mathring{H}^1(\Omega) \tag{3.6}$$

dans $\mathscr{H}(t)$.

De plus, d'après l'inégalité de Sobolev, — i.e.,

$$\| u \|_{L^6(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{pour } u \in \mathring{H}^1(\Omega), \tag{3.7}$$

où

$$\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_i^2 \, dx,$$

l'opérateur nonlinéaire $N(t)$ applique $\mathbf{D}$ dans $\mathscr{H}(t)$.

Proposition 3.2. *Il existe une constante $\delta_3 > 0$ indépendante de U telle que*

$$\| u \|_{L^6(\Omega)} \leqslant \delta_3 \| u \|_1 \qquad \textit{pour } u \in H^1(\Omega). \tag{3.8}$$

Pour la démonstration, il suffit de citer

Lemme 3.3. *Soit $\tilde{\Omega}$ un domaine borné dans $\mathbf{R}^3$ qui contient strictement Ω; i.e., $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Alors, il existe une extension $Ju \subseteq \mathring{H}^1(\tilde{\Omega})$ pour $u \subseteq H^1(\Omega)$ telle que*

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \| Ju \|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leqslant \delta_4 \| u \|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.9}$$

où la constante δ_4 est indépendante de u.

La démonstration de ce lemme est omise parce qu'elle figure dans de nombreux ouvrages sur les problèmes aux limites. Par exemples, [1], [13].

Remarque 3.4 [6]. D'après la condition (3.3), il existe une constante $\delta_5 > 0$ telle que, pour tout $U = \{u, v\} \in \mathscr{H}(t)$,

$$\frac{1}{\delta_5} (\| u \|_1^2 + \| v \|^2) \leqslant \| U \|_{\mathscr{H}(t)}^2 \leqslant \delta_5 (\| u \|_1^2 + \| v \|^2). \tag{3.10}$$

En employant l'integration par parties, nous avons

LEMME 3.5 [6]. *Il existe une constante* $\delta_6 > 0$ *telle que*

$$|(A(t)\, U, U)_{\mathscr{H}(t)}\,| \leqslant \delta_6 \,\|\, U \,\|_{\mathscr{H}(t)}^2 \tag{3.11}$$

pour tout $U \in \mathbf{D}$.

Ici, nous citons le lemme de Gronwall sans démonstration.

LEMME 3.6 (Gronwall). *Soient* $\gamma(t)$ *et* $\rho(t)$ *positives, et définies sur* $[0, a]$ $(a > 0)$. *Si* $\gamma(t)$ *est sommable sur* $[0, a]$ *et* $\rho(t)$ *est croissante, et satisfaisant à*

$$\gamma(t) \leqslant c \int_0^t \gamma(s)\, ds + \rho(t),$$

alors nous avons

$$\gamma(t) \leqslant e^{ct} \rho(t).$$

Nous démontrons la première inégalité d'énergie comme suit.

PROPOSITION 3.7. *Soit*

$$u(t) \in \mathscr{E}_t^{\,2}(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^{\,1}(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^{\,0}(H^2(\Omega))$$

une solution du problème (3.1). *Alors, nous avons*

$$E(t) \leqslant c(T) \left(E(0) + \int_0^t \| f(s) \|^2\, ds \right), \tag{3.12}$$

où

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \{ \| u_t(t) \|^2 + \| \nabla_x u(t) \|^2 + \tfrac{1}{2} \,\|\, u(t) \|_{L^4(\Omega)}^4 \}$$

et $c(T)$ *est une constante indépendante de* $u(t)$.

Démonstration. Posons $U(t) = \{u(t), u_t(t)\}$. Alors, $U(t)$ satisfait à (3.4). D'autre part, nous calculons

$$\frac{d}{dt} \left\{ \tfrac{1}{2} \,\|\, U(t) \|_{\mathscr{H}(t)}^2 + \tfrac{1}{4} \int_\Omega q(t)\, u(t)^4\, dx \right\}$$

$$= (U', U)_{\mathscr{H}(t)} + (U, U)_{\dot{\mathscr{H}}(t)} + \int_\Omega q(t)\, u(t)^3\, u_t(t)\, dx + \tfrac{1}{4} \int_\Omega q_t(t)\, u(t)^4\, dx, \tag{3.13}$$

où

$$U' = \frac{d}{dt}\, U(t)$$

et

$$(U, U)_{\dot{\mathscr{H}}(t)} = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, a_{ij}(t) \cdot u_i\,, u_j \right) \qquad \text{pour } U = \{u, v\} \in \mathscr{H}(t).$$

Nous avons

$$|(U(t), U(t))_{\mathscr{H}(t)}| \leqslant \delta_7 \| U(t)\|^2_{\mathscr{H}(t)}, \qquad (3.14)$$
$$|(F(t), U(t))_{\mathscr{H}(t)}| \leqslant \| F(t)\|_{\mathscr{H}(t)} \| U(t)\|_{\mathscr{H}(t)},$$

et

$$\int_\Omega q_t(t)\, u(t)^4\, dx \leqslant \delta_8 \int_\Omega q(t)\, u(t)^4\, dx, \qquad (3.15)$$

où nous utiliserons les relations (c) et $q(x, t) \in \mathscr{E}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Donc, on estime les termes de droite de (3.13) par relation

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\| U(t)\|^2_{\mathscr{H}(t)} + \tfrac{1}{4}\int_\Omega q(t)\, u(t)^4\, dx\right\} \\ &\qquad \leqslant e^{\delta_9 t}\left\{\tfrac{1}{2}\| U(0)\|^2_{\mathscr{H}(0)} + \tfrac{1}{4}\int_\Omega q(0)\, u(0)^4\, dx + \int_0^t \| f(s)\|^2\, ds\right\}. \end{aligned} \qquad (3.16)$$

En utilisant l'inégalité (3.10) et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons l'inégalité (3.12) immédiatement. Q.E.D.

De l'inégalité (3.17), on déduite le

COROLLAIRE 3.8. *Soit*

$$u(t) \in \mathscr{E}_t^2(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^1(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^2(\Omega))$$

une solution du problème (3.1). *Supposons que*

$$\| u_0 \|_1^2 + \| u_1 \|^2 + \int_0^T \| f(s)\|^2\, ds \leqslant C_1. \qquad (3.18)$$

Alors, il existe une constante K_1 ne dépendant que de C_1, T telle que

$$\| u(t)\|_1^2 + \| u_t(t)\|^2 \leqslant K_1 \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (3.19)$$

THÉORÈME 3.9. *Fixons T et $C_1 > 0$ arbitrairement. Pour les données $[u_0, u_1, f(t)]$ et $[v_0, v_1, g(t)]$ appartenant à*

$$(H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \times \mathring{H}^1(\Omega) \times (\mathscr{E}_t^1(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^1(\Omega)))$$

et satisfaisant à

$$\| u_0 \|_1^2 + \| u_1 \|^2 + \int_0^T \| f(s)\|^2\, ds \leqslant C_1$$

et $\qquad (3.20)$

$$\| v_0 \|_1^2 + \| v_1 \|^2 + \int_0^T \| g(s)\|^2\, ds \leqslant C_1,$$

s'il existe des solutions $u(t)$ *et* $v(t)$ *appartenant à*

$$\mathscr{E}_t^2(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^1(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^2(\Omega))$$

de (3.1) *respectivement, alors nous avons*

$$\begin{aligned} &\| u(t) - v(t)\|_1^2 + \| u_t(t) - v_t(t)\|^2 \\ &\quad \leqslant K_1 \left\{\| u_0 - v_0 \|_1^2 + \| u_1 - v_1 \|^2 + \int_0^t \| f(s) - g(s)\|^2 \, ds\right\} \qquad (3.21) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

où la constante K_1 *ne dépend que de* C_1 *et* T.

Démonstration. Comme $u(t)$ et $v(t)$ sont les solutions du problème (3.1), $w(t) = u(t) - v(t)$ est une solution du problème

$$\begin{aligned} &w_{tt} + a_1(x, t\colon D)\, w_t + a_2(x, t\colon D)\, w + q(t)\,(u^3 - v^3) = f(t) - g(t), \\ &\qquad w(0) = u_0 - v_0\,, \qquad w_t(0) = u_1 - v_1\,, \qquad w\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

En prenant le produit scalaire de l'équation pour w avec w_t comme dans la démonstration de la Proposition 3.7, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| W(t)\|_{\mathscr{H}(t)}^2 \leqslant k_1 \| W(t)\|_{\mathscr{H}(t)}^2 + \| F(t) - G(t)\|_{\mathscr{H}(t)}^2\,, \qquad (3.23)$$

où $W(t) = \{w(t), w_t(t)\}$, $F(t) = \{0, f(t)\}$, et $G(t) = \{0, g(t)\}$, et k_1 est une constante dépendante de C_1 et T. Donc, nous avons (3.21) immédiatement en employant le Lemme 3.6. Q.E.D.

COROLLAIRE 3.10. *La solution du problème* (3.1) *est déterminée uniquement dans l'espace*

$$\mathscr{E}_t^2(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^1(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^2(\Omega))$$

par les données

$$[u_0\,, u_1\,, f(t)] \in (H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \times H^1(\Omega) \times (\mathscr{E}_t^1(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^1(\Omega))).$$

Pour estimer le terme non-linéaire, nous allons donner le lemme suivant.

LEMME 3.11. *Soient* u, v, *et* w *appartenant à* $H^1(\Omega)$.

(a) *Alors, il existe une constante* C *indépendante de* u, v, *et* w *telle que*

$$\| u \cdot v \cdot w \| \leqslant C \| u \|_1 \| v \|_1 \| w \|_1\,. \qquad (3.24)$$

(b) *Si la suite de fonctions* $u^{(n)} \in H^1(\Omega)$ (*respectivement* $v^{(n)}$ *et* $w^{(n)}$) *converge vers* u (*respectivement*, v *et* w) *dans* $H^1(\Omega)$, *alors nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \| u \cdot v \cdot w - u^{(n)}v^{(n)}w^{(n)} \| = 0. \tag{3.25}$$

Démonstration. (a) En employant les inégalités de Sobolev (3.7) et de Hölder, nous avons l'inégalité ci-dessous pour u, v, et $w \in \mathring{H}'(\Omega)$:

$$\| uvw \| \leqslant (2/\sqrt{3})^3 \| \nabla u \| \| \nabla v \| \cdot \| \nabla w \| , \qquad u, v, \quad \text{et} \quad w \in \mathring{H}^1(\Omega). \tag{3.26}$$

Si l'on utilise (3.8) au lieu de (3.7), on a (3.24) tout de suite.

(b) On utilise la relation

$$uvw - u^{(n)}v^{(n)}w^{(n)} = (u - u^{(n)})\, vw + u^{(n)}(v - v^{(n)})\, w + u^{(n)}v^{(n)}(w - w^{(n)})$$

et on obtient le résultat. Q.E.D.

Pour démontrer les autres inégalités d'énergie, nous préparons le lemme suivant.

LEMME 3.12 [6]. *Pour* λ_0 *assez grand* (λ_0: *fixé*), *il existe une constante* $\alpha_m > 0$, *indépendante de* t, *telle que pour chaque*

$$U = \{u, v\} \in \mathbf{D} \cap (H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)),$$
$$||| U |||_m \leqslant \alpha_m ||| (\lambda_0 I - A(t))\, U |||_{m-1} , \tag{3.27}$$

où

$$||| U |||_m^2 = \| u \|_m^2 + \| v \|_{m-1}^2 .$$

Nous définissons

$$E_m(t) = ||| U^{(m-2)}(t) |||_2^2 + ||| U^{(m-1)}(t) |||_1^2 , \qquad U^{(k)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^k U(t), \tag{3.28}$$

pour $m \geqslant 2$ et

$$E_1(t) = ||| U(t) |||_1^2 .$$

Alors, nous avons

THÉORÈME 3.13. *Soit*

$$[u_0 , u_1 , f(t)] \in [\mathbf{D} \cap (H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega))] \times \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^k(H^{l+1-k}(\Omega))$$

(l: *entier* $\geqslant 0$).

S'il existe une fonction

$$u(t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$$

satisfaisant à (3.1), *alors elle vérifie l'inégalité*

$$E_{l+2}(t) \leqslant K_{l+2} \qquad \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.29}$$

où K_{l+2} *ne dépend que de*

$$\| u_0 \|_{l+2}, \qquad \| u_1 \|_{l+1}, \qquad \{\| f^{(k)}(0)\|_{l-k}\}_{k=0,1,\dots,l},$$
$$\left(\int_0^T \| f^{(k)}(s)\|_{l+1-k}\, ds\right)_{k=1,2,\dots,l},$$

et T.

Démonstration. Pour $k \leqslant l$, nous calculons comme suit.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} |||\, U^{(k)} |||_1^2 & \\
&= (D_t(D_t^k U(t)), D_t^k U(t))_1 \\
&= \left(A(t)\, U^{(k)} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)}(t)\, U^{(k-j)} + F^{(k)} + (N(t)\, U)^{(k)}, U^{(k)}\right)_1,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où

$$A^{(j)}(t) = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ -a_2^{(j)}(x, t\colon D), & -a_1^{(j)}(x, t\colon D) \end{bmatrix}, \qquad j \geqslant 1$$

$$a_2^{(j)}(x, t\colon D) = -\sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j a_{lm}(x, t)\right] \frac{\partial}{\partial x_m} + \cdots, \text{ etc.,}$$

et

$$(N(t)\, U)^{(k)} = \{0, D_t^k(q(t)\, u(t)^3)\},$$
$$(U_1, U_2)_1 = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (D^\alpha u_1, D^\alpha u_2) + (v_1, v_2), \qquad U_1 = \{u_1, v_1\},\ U_2 = \{u_2, v_2\}.$$

Nous observons que

$$D_t^k u(t)^3 = 3u^2 \cdot D_t^k u + P_k(u, D_t u, \dots, D_t^{k-1} u), \tag{3.31}$$

où P_k est une polynome homogène d'ordre 3 de k-variables. Grâce aux relations (3.12) et (3.26), on a

$$\| u^2 D_t^k u \|^2 \leqslant C^{te} \| \nabla D_t^k u \|^2 \qquad \text{pour } k \leqslant l + 1, \tag{3.32}$$

où C^{te} ne dépend que de $\| u_0 \|_1$, $\| u_1 \|_0$, $\int_0^T \| f(s)\|\, ds$, et T.

D'autre part, P_k est estimé par

$$\| P_k(u, D_t u, \ldots, D_t^{k-1} u) \| \\ \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 P_k(\| \nabla u \|, \| \nabla D_t u \|, \ldots, \| \nabla D_t^{k-1} u \|) \qquad \text{pour } k \leqslant l+2. \tag{3.33}$$

Cette estimation se fonde sur Sather [16].

Comme $U^{(k)} \subseteq \mathbf{D}$ pour $k \leqslant l$, en employant (3.11), nous avons

$$||| U^{(k)}(t) |||_1 \\ \leqslant C^{te} \left\{ ||| U^{(k)}(0) |||_1 + \int_0^t \left||| \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)}(s)\, U^{(k-j)} + F^{(k)} + (N(s)\, U)_1^{(k)} \right||| ds \right\}. \tag{3.34}$$

Ici, nous remarquons que l'inégalité (3.34) est aussi valable pour $k = l+1$. En effet, si on pose $(\partial_h U)(t) = h^{-1}(U(t+h) - U(t))$, elle satisfait l'équation

$$\frac{d}{dt}(\partial_h U)(t) = A(t+h)(\partial_h U)(t) + (\partial_h A)(t)\, U(t) + (\partial_h F)(t) \\ + h^{-1}(N(t+h)\, U(t+h) - N(t)\, U(t)). \tag{3.35}$$

Comme $D_t^l(\partial_h U)(t) \in \mathscr{E}_t^1(\mathbf{D})$, nous pouvons établir la méme inégalité que (3.34) pour $D_t^l(\partial_h U)(t)$. Si on fait tendre h vers 0, on a l'inégalité (3.34) pour $k = l+1$.

Maintenant, en employant (3.26) et (3.35), nous avons

$$|||(N(s)\, U)^{(k)} |||_1^2 \leqslant C^{te} \sum_{j=0}^{k} \{ \| \nabla D_t^j u \|^2 + P_j^2(\| \nabla u \|, \| \nabla D_t u \|, \ldots, \| \nabla D_t^{j-1} u \|) \} \\ \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant l+1. \tag{3.36}$$

D'autre part, nous avons

$$\left||| \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)}(s)\, U^{(k-j)} \right|||_1 \leqslant C^{te} \sum_{j=1}^{k} ||| U^{(k-j)} |||_1 . \tag{3.37}$$

Grâce à (3.27), nous calculons

$$E_{k+1}(t) = ||| U^{(k-1)}(t) |||_2^2 + ||| U^{(k)}(t) |||_1^2 \\ \leqslant C^{te} \{ ||| U^{(k-1)} |||_1^2 + ||| A(t)\, U^{(k-1)} |||_1^2 \} + ||| U^{(k)} |||_1^2 \\ \leqslant C^{te} \Big\{ ||| U^{(k)} |||_1^2 + ||| U^{(k-1)} |||_1^2 \\ + \left||| F^{(k-1)} + (N(t)\, U)^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)}(t)\, U^{(k-1-j)} \right|||_1^2 \Big\}. \tag{3.38}$$

En utilisant (3.34), (3.36), et (3.37),

$$E_{k+1}(t) \leqslant C^{te} \Big\{ ||| U^{(k)}(0) |||_1^2 + \sum_{j=1}^{k} \int_0^T ||| U^{(k-j)} |||_2^2 \, ds + \int_0^T \| f^{(k)}(s) \|^2 \, ds$$
$$+ \sum_{j=0}^{k} \int_0^T [||| U^{(j)} |||_1^2 + P_j^2(\| \nabla u \|, \| \nabla D_t u \|, \ldots, \| \nabla D_t^{j-1} u \|)] \, ds \Big\}$$
$$+ C^{te} \Big\{ ||| U^{(k-1)} |||_1^2 + \| f^{(k-1)}(0) \|^2 + \int_0^t \| f^{(k)} \|^2 \, ds$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} [||| U^{(j)} |||_1^2 + P_j^2(\| \nabla u \|, \ldots, \| \nabla D_t^{j-1} u \|)] + \sum_{j=1}^{k-1} ||| U^{(k-1-j)} |||^2 \Big\}.$$

En faisant $k = 1$ dans (3.38), nous avons

$$E_2(t) \leqslant C^{te} \Big\{ ||| U^{(1)}(0) |||_1^2 + \int_0^t ||| U(s) |||_2^2 \, ds + \int_0^t \| f^{(1)}(s) \|^2 \, ds$$
$$+ \int_0^t [||| U(s) |||_1^2 + ||| U^{(1)}(s) |||_1^2] \, ds + ||| U |||_1^2 + \| f(0) \|_2^2 \Big\}. \tag{3.39}$$

En remarquant

$$||| U^{(1)}(0) ||| \leqslant ||| A(0) \, U(0) |||_1 + ||| F(0) |||_1 + ||| N(0) \, U(0) |||_1$$
$$\leqslant C^{te} \{ \| u_0 \|_2 + \| u_1 \|_1 + \| f(0) \| + \| \nabla u_0 \|^3 \}$$

et (3.17), nous avons $E_2(t) \leqslant K_2$ où K_2 ne dépend que de $\| u_0 \|_2$, $\| u_1 \|_1$, $\| f(0) \|$, $\int_0^t \| f'(s) \| \, ds$, et T.

Ceci signifie que

$$P_2(\| \nabla u \|, \| \nabla u_t \|) \leqslant K_2^{te}. \tag{3.40}$$

En général, K_k^{te} signifie que la constante ne dépend que de $\| u_0 \|_k$, $\| u_1 \|_{k-1}$,

$$\{ \| f^{(j)}(0) \|_{k-2-j} \}_{j=0,1,\ldots,k-2}, \qquad \Big\{ \int_0^T \| f^{(j)}(s) \|_{k-1-j} \, ds \Big\}_{j=1,2,\ldots,k-1}.$$

Donc, pour $k = 2$,

$$E_3(t) \leqslant C^{te} \Big\{ ||| U^{(2)}(0) |||_1^2 + \int_0^t (||| U^{(1)} |||_2^2 + ||| U |||_2^2) \, ds + \| f'(0) \|^2$$
$$+ \int_0^t \| f'(s) \|^2 \, ds + \int_0^t [||| U |||_1^2 + ||| U^{(1)} |||_1^2 + ||| U^{(2)} |||_1^2 \tag{3.41}$$
$$+ P_2^2(\| \nabla u \|, \| \nabla u_t \|)] \, ds + ||| U^{(1)} |||_1^2 + ||| U |||_2^2 \Big\}.$$

Parce-que $E_1(t)$ et $E_2(t)$ sont bornés et que l'on a (3.40), nous avons

$$E_3(t) \leqslant K_3^{te}. \tag{3.42}$$

Ceci signifie que

$$P_3(\| \nabla u \|, \| \nabla u_t \|, \| \nabla u_{tt} \|) \leqslant K_3^{te}. \tag{3.43}$$

Et ainsi que nous avons l'inégalité désirée. Q.E.D.

Par Lemme 3.3, nous obtenons facilement

LEMME 3.14. *Soit $\tilde{\Omega}$ satisfaisant la condition du Lemme* 3.3. *Alors pour $u(t) \in \mathscr{E}_t^k(H^l(\Omega))$, il existe une extension $(Ju)(t) \in \mathscr{E}_t^k(\mathring{H}^l(\tilde{\Omega}))$ telle que*

$$\| u(t)\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \|(Ju)(t)\|_{H^m(\tilde{\Omega})} \leqslant C \| u(t)\|_{H^m(\Omega)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.44}$$

où la constante C ne dépend pas de u et de t.

LEMME 3.15. *Si $v(t)$ appartient à $\bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$, alors*

$$q(t)\, v(t)^3 \in \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^k(H^{l+1-k}(\Omega))$$

et

$$\sum_{j=0}^{l+1} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j (q(t)\, v(t)^3) \right\|_{l+1-j} \leqslant K'_{l+2}, \tag{3.45}$$

où la constante K'_{l+2} ne dépend que de

$$\sum_{j=0}^{l+2} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j v(t) \right\|_{l+2-j}.$$

Démonstration. D'abord, nous allons démontrer que, si $v(t) \in \mathscr{E}_t^0(H^m(\Omega))$, alors $v(t)^3 \in \mathscr{E}_t^0(H^{m-1}(\Omega))$:

Soit α un multiindex tel que $|\alpha| \leqslant m$. Alors,

$$D^\alpha v(t)^3 = 3v(t)^2 D^\alpha v(t) + Q_\alpha(v(t), \ldots, D^\beta v(t)), \qquad \text{où} \qquad |\beta| = |\alpha| - 1, \tag{3.46}$$

où Q_α est un polynome homogène d'ordre 3. En employant les Lemmes 3.11 et 3.14, nous avons

$$\| w_1(t)\, w_2(t)\, w_3(t)\| \leqslant C \| w_1(t)\|_1 \| w_2(t)\|_1 \| w_3(t)\|_1 \tag{3.47}$$

pour $w_j(t) \in \mathscr{E}_t^0(H^1(\Omega))$. Donc, nous prouvons notre assertion. Par la même méthode, nous démonterons que si $v(t) \in \mathscr{E}_t^k(H^{m-k}(\Omega))$, alors $v(t)^3 \in \mathscr{E}_t^k(H^{m-1-k}(\Omega))$. Ce qui établit l'inégalité (3.45). Q.E.D.

Le théorème principal dans ce paragraph est

THÉORÈME 3.16. *Soit*

$$[u_0, u_1, f(t)] \in [\mathbf{D} \cap (H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega))] \times \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^k(H^{l+1-k}(\Omega)),$$

avec

$$\| u_0 \|_{l+2} + \| u_1 \|_{l+1} + \sum_{j=0}^{l} \| f^{(j)}(0)\|_{l-j} + \sum_{j=1}^{l+1} \int_0^T \| f^{(j)}(s)\|_{l+1-j}\, ds \leqslant C_{l+2}\,. \tag{3.47}$$

Supposons qu'une fonction $u(t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$ *soit une solution du problème* (3.1).

Alors, il existe une constante K_{l+2} *ne dépendant que de* C_{l+2} *et* T *telle que*

$$\sum_{j=0}^{l+2} \| u^{(j)}(t)\|_{l+2-j} \leqslant K_{l+2} \qquad \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.48}$$

Démonstration. Remarquons, d'abord que pour chaque t, $u(t)$ satisfait au problème aux limites suivant:

$$\begin{aligned} & a_2(x, t; D)\, u(t) = f(t) - u_{tt}(t) - a_1(x, t; D)\, u_t(t) - q(t)\, u(t)^3 \\ \text{et} \quad & u(t)\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Nous différentions (3.49) m-fois par rapport à t:

$$\begin{aligned} a_2(x, t; D)\, u^{(m)}(t) = &- \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} a_2^{(j)}(x, t; D)\, u^{(m-j)}(t) + f^{(m)}(t) - u^{(m+2)}(t) \\ &- \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_1^{(j)}(x, t; D)\, u^{(m+1-j)}(t) - D_t^{\,m}(q(t)\, u(t)^3). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Donc, en employant l'estimation à priori bien connue pour l'équation elliptique, nous avons, pour $l = 1$,

$$\| u(t)\|_3 \leqslant C\{ f(t)\|_1 + \| u_{tt}(t)\|_1 + \|a_1(x, t; D)\, u_t(t)\|_1 + \| q(t)\, u(t)^3 \|_1\} \tag{3.51}$$

et

$$\begin{aligned} \| u_t(t)\|_2 \leqslant C\{\|f^{(1)}(t)\| &+ \| u_{ttt}(t)\| + \| a_1(x, t; D)\, u_{tt}(t)\| + \| a_1^{(1)}(x, t; D)\, u_t(t)\| \\ &+ \| a_2^{(1)}(x, t; D)\, u \| + \| D_t(q(t)\, u(t)^3)\|\}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

En employant $E_3(t) \leqslant K_3$ et (3.45), (3.51), et (3.52), nous obtenons le théorème pour $l = 1$ immédiatement. Pour $l = 2, 3, \ldots$, nous allons calculer de la même manière que pour $l = 1$. Q.E.D.

4. *Existence et Régularité pour Ω Fixé*

D'abord, nous définissons des conditions de compatibilité.

DÉFINITION 4.1. On dit que les données initiales

$$[u_0, u_1, f(t)] \in H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega) \times \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^k(H^{l+1-k}(\Omega))$$

satisfont la condition de compatibilité d'ordre l, si $u_p \in \mathring{H}^1(\Omega)$ ($p = 0, 1, 2, \ldots, l+1$), où les fonctions $u_p \in H^{l+2-p}(\Omega)$ sont définies par

$$u_p = -\sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} \{a_2^{(k)}(x, 0; D)\, u_{p-k-2} + a_1^{(k)}(x, 0; D)\, u_{p-k-1}\} + f^{(p-2)}(0)$$
$$\text{pour } p = 2, 3, \ldots, l+1. \tag{4.1}$$

Cette définition a été donnée explicitement par Ikawa [6].

DÉFINITION 4.2. Nous définissons l'ensemble $V_{l+2}(T)$ comme suit: $V_{l+2}(T)$ est un sous-ensemble convexe de l'espace

$$X_{l+2}(T) = \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k([0, T]: H^{l+2-k}(\Omega))$$

tel que

$$u(t)\,|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{et} \qquad u^{(p)}(0) = u_p \qquad (p = 0, 1, \ldots, l+1),$$

où $u_p \in H^{l+2-p}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ avec la métrique

$$\rho_{l+2}(u, v) = \| u - v \|_{X_{l+2}(T)},$$

où

$$\| u \|_{X_{l+2}(T)} = \sum_{j=0}^{l+2} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u^{(j)}(t) \|_{l+2-j}. \tag{4.2}$$

Il est évident que l'espace $X_{l+2}(T)$ est complet pour cette métrique et que $V_{l+2}(T)$ est fermé dans $X_{l+2}(T)$.

Notre résultat s'énonce comme suit.

THÉORÈME 4.3. *Supposons que* $[u_0, u_1, f(t)]$ *appartiennent à*

$$H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega) \times \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^k(H^{l+1-k}(\Omega))$$

et satisfont à la condition de compatibilité d'ordre l.

Alors, il existe une solutions $u(t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$ *du problème* (3.1) *et elle est unique dans*

$$\mathscr{E}_t^2(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^1(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^2(\Omega)).$$

COROLLAIRE 4.4. *Sous la même hypothèse que le théorème ci-dessus, il existe une solution* $u(t) \in \mathscr{E}^l(\bar{\Omega} \times [0, T])$.

Démonstration. Remarquons l'inclusion

$$\bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega)) \subset \mathscr{E}^l(\bar{\Omega} \times [0, T]). \tag{4.3}$$

Q.E.D.

Nous allons montrer l'existence de la solution par les approximations successives.

On considère le problème linéaire suivant:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t) + a_1(x, t; D)\, u_t(t) + a_2(x, t; D)\, u(t) &= g(t), \\ u(0) = u_0, \qquad u_t(0) = u_1, \qquad u(t)\,|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

LEMME 4.5 [6, 7]. *Soient* $[u_0, u_1, f(t)]$ *appartenant à*

$$H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega) \times \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^k(H^{l+1-k}(\Omega))$$

et satisfaisant à la condition de compatibilité d'ordre l.

Alors, il existe une solution $u(t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathscr{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$ *de* (4.4) *et elle est unique dans* $\mathscr{E}_t^2(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^1(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^0(H^2(\Omega))$. *De plus, elle satisfait à*

$$\| u \|_{X_{l+2}(T)}^2 \leqslant C_{l+2} \left\{ \| u_0 \|_{l+2}^2 + \| u_1 \|_{l+1}^2 + \sum_{j=0}^{l} \| g^{(j)}(0) \|_{l-j} + \sum_{j=0}^{l+1} \int_0^T \| g^{(j)}(s) \|_{l+1-j}^2\, ds \right\}. \tag{4.5}$$

La démonstration est omise ici, parce-qu'elle est assez longue et que l'on peut la trouver dans [6, 7] et dans d'autres traveaux.

Maintenant, nous introduisons l'opérateur Z dans $V_{l+2}(T)$ comme suit. Soit $v(t) \subseteq V_{l+2}(T)$. Alors $u = Zv$ est donnée comme la solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t) + a_1(x, t; D)\, u_t(t) + a_2(x, t; D)\, u(t) &= f(t) - q(t)\, v(t)^3, \\ u(0) = u_0\,, \qquad u_t(0) = u_1\,, \qquad u(t)\,|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Par le Lemme 3.15, nous avons $f(t) - q(t)\, v(t)^3 \in \bigcap_{k=0}^{l+1} \mathscr{E}_t^{\,k}(H^{l+1-k}(\Omega))$. Donc, l'opérateur Z est bien définie sur $V_{l+2}(T)$ dans $V_{l+2}(T)$.

LEMME 4.6. *Si $v(t)$ appartient à $V_{l+2}(T)$, alors nous avons*

$$D_t^{\,k}(q(t)\, v(t)^3)\,|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \textit{pour } k = 0, 1,\dots, l \quad \textit{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $D_t^{\,k} v(t)$ appartient à $\mathscr{E}_t^{\,0}(H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega))$ pour $k = 0, 1,\dots, l$. En général, si les fonctions $w_j(t)$ appartient à $\mathscr{E}_t^{\,0}(H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega))$, il existe des séries des fonctions $w_j^{(n)}(t) \in \mathscr{E}_t^{\,0}(\mathscr{E}^2(\bar{\Omega}))$ et $w_j^{(n)}(t)\,|_{\partial\Omega} = 0$ qui convergent à $w_j(t)$ dans $\mathscr{E}_t^{\,0}(H^2(\Omega))$. Par le Lemme 3.11,

$$\| w_1(t)\, w_2(t)\, w_3(t) - w_1^{(n)}(t)\, w_2^{(n)}(t)\, w_3^{(n)}(t)\|_1 \to 0$$

quand $n \to \infty$. Ainsi, $w_1(t)\, w_2(t)\, w_3(t)\,|_{\partial\Omega} = 0$ parce que

$$w_1^{(n)}(t)\, w_2^{(n)}(t)\, w_3^{(n)}(t)\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Enfin, nous avons $D_t^{\,k} v(t)^3\,|_{\partial\Omega} = 0$ pour $k = 0, 1,\dots, l$. Q.E.D.

Nous allons énumérer les propriétés suivantes de Z.

LEMME 4.7. *Soit $B_{l+2} > 0$ donnée. Supposons que*

$$\| u_0 \|_{l+2} + \| u_1 \|_{l+1} + \sum_{j=0}^{l} \| f^{(j)}(0)\|_{l-j} + \sum_{j=0}^{l+1} \int_0^T \| f^{(j)}(s)\|_{l+1-j}\, ds \leqslant B_{l+2};$$

alors il existe les constantes $L_{l+2} > B_{l+2}$, $T_{l+2} > 0$, et $0 < \gamma_{l+2} < 1$ ne dépendant que de B_{l+2} et T telles que

(i) $\| Zv \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant L_{l+2}$ *pour* $\| v \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant L_{l+2}$ *et* $v \in V_{l+2}(T_{l+2})$ *et,*

(ii) *si* $\| v \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant L_{l+2}$, $\| \tilde{v} \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant L_{l+2}$, *et* $v, \tilde{v} \in V_{l+2}(T_{l+2})$,

alors

$$\| Zv - Z\tilde{v} \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant \gamma_{l+2} \| v - \tilde{v} \|_{X_{l+2}(T_{l+2})}\,. \tag{4.7}$$

Démonstration. Par la définition, $u = Zv$ est une solution de (4.6). En employant le Lemme 4.5 avec $g(t) = f(t) - q(t)\, v(t)^3$, nous avons

$$\| u \|_{X_{l+2}(T)}$$
$$\leqslant C_{l+2} \left\{ \| u_0 \|_{l+2} + \| u_1 \|_{l+1} + \sum_{j=0}^{l} \| f^{(j)}(0) \|_{l-j} + \sum_{j=0}^{l} \| (q(0)\, v(0)^3)^{(j)} \|_{l-j} \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{l+1} \int_0^T \| f^{(j)}(s) \|_{l+1-j}\, ds + \sum_{j=0}^{l+1} \int_0^T \| (q(s)\, v(s)^3)^{(j)} \|_{l+1-j}\, ds \right\}. \tag{4.8}$$

Par définition de l'espace $X_{l+2}(T)$ et de C_{l+2}, on a

$$\| u \|_{X_{l+2}(T)} \leqslant B'_{l+2} + TM_{l+2}, \tag{4.9}$$

où la constante B'_{l+2} ne dépend que de B_{l+2} et la constante M_{l+2} ne dépend que de $\| v(t) \|_{X_{l+2}(T)}$.

D'abord, nous choisissons L_{l+2} strictement supérieur à $2B'_{l+2}$. Alors, M_{l+2} est définie par L_{l+2}. Donc, si nous prenons T_{l+2} satisfaisant à (a) $T_{l+2} \leqslant (2M_{l+2})^{-1} L_{l+2}$ et (b) $\| v \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant L_{l+2}$, alors nous avons l'inégalité (i). (D'après la définition de $V_{l+2}(T)$, il existe $T_{l+2} > 0$ satisfaisant à (b)).

Soient $u = Zv$, $\tilde{u} = Z\tilde{v}$, et $w = u - \tilde{u}$. Alors w est une solution du problème

$$\begin{gathered} w_{tt}(t) + a_1(x, t; D)\, w_t(t) + a_2(x, t; D)\, w(t) = q(t)\, (v(t)^3 - \tilde{v}(t)^3), \\ w(0) = 0, \qquad w_t(0) = 0, \qquad w(t)\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Grâce à (4.8), nous avons

$$\| w \|_{X_{l+2}(T)} \leqslant C_{l+2} \sum_{j=0}^{l+1} \int_0^T \| (q(s)\, v(s)^3 - q(s)\, \tilde{v}(s)^3)^{(j)} \|_{l+1-j}\, ds.$$

Il est évident qu'il existe une constante α_{l+2} dépendant de L_{l+2} et T telle que

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\{ \sum_{j=0}^{l+1} \| (q(t)\, v(t)^3 - q(t)\, \tilde{v}(t)^3)^{(j)} \|_{l+1-j} \right\} \leqslant \alpha_{l+2} \| v - \tilde{v} \|_{X_{l+2}(T)}.$$

Par consequent, si nous choisissons T_{l+2} satisfaisant

$$T_{l+2} < (2(l+2)\, \alpha_{l+2} C_{l+2})^{-1},$$

nous obtenons (ii) avec $\gamma_{l+2} = \frac{1}{2}$. Q.E.D.

Démonstration du Théorème 4.3. D'après le Lemme 4.7, il existe une solution de (3.1) sur $[0, T_{l+2})$. D'après l'unicité de la solution, nous pouvons choisir T_{l+2} comme le temps maximum pour les données $[u_0, u_1, f(t)]$ avec

$$\| u_0 \|_{l+2} + \| u_1 \|_{l+1} + \sum_{j=0}^{l} \| f^{(j)}(0) \|_{l-j} + \sum_{j=1}^{l+1} \int_0^T \| f^{(j)}(s) \|_{l+1-j} \, ds \leqslant B_{l+2} .$$

D'autre part, par Théorème 3.16, il existe une constante K_{l+2} ne dépend que de B_{l+2} et T_{l+2} telle que

$$\| u \|_{X_{l+2}(T_{l+2})} \leqslant K_{l+2} .$$

Supposons que $T_{l+2} < T$.

Soit $\tilde{B}_{l+2} = \| u \|_{X_{l+2}(T_{l+2})}$ et T'_{l+2} l'intervalle d'existence de la solution de (3.1) pour $[\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, f(t)]$ satisfaisant $\| \tilde{u}_0 \|_{l+2} + \| \tilde{u}_1 \|_{l+1} \leqslant \tilde{B}_{l+2}$. Le problème (3.1) avec les données $[u(T''_{l+2}), u_t(T''_{l+2}), f(t - T''_{l+2})]$ à $t = T''_{l+2}$, a une solution $\tilde{u}(t)$ sur l'intervalle $[T''_{l+2}, T_{l+2} + (1 - 1/c)\, T'_{l+2})$, où

$$T''_{l+2} = T_{l+2} - \frac{1}{c} T'_{l+2} ,$$

$c > 1$ est choisi comme $T''_{l+2} > 0$.

D'après l'unicité de la solution, nous avons $u(t) = \tilde{u}(t)$ sur $[T''_{l+2}, T_{l+2})$. Ainsi, on peut prolonger la solution sur $[0, T_{l+2} + (1 - 1/c)\, T'_{l+2})$. Ceci est en contradiction avec la définition de T_{l+2}. Donc, nous concluons que $T = T_{l+2}$. Q.E.D.

5. *Le Domain d'Influence dans Ω Fixé*

Soient $\lambda_1(x, t; \xi)$ et $\lambda_2(x, t; \xi)$ les racines de l'équation caracteristique de (3.1); c'est-à-dire,

$$\begin{gathered} \lambda^2 + 2 \sum_{j=1}^{3} h_j(x, t)\, \xi_j \cdot \lambda - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j = 0 \\ \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T) \qquad \text{et} \qquad \xi \in \mathbf{R}^3. \end{gathered} \tag{5.1}$$

On note

$$\lambda_{\max} = \sup_{\substack{j=1,2,|\xi|=1 \\ (x,t)\in\Omega\times(0,T)}} | \lambda_j(x, t; \xi) | \tag{5.2}$$

et

$$\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) = \{(x, t);\ | x - x_0 | < \lambda_{\max}(t_0 - t),\ t \geqslant 0\}.$$

Alors, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. *Supposons que* $u(x, t) \in \mathscr{E}^2$ *soit définie dans* $\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) \cap Q_T$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, *et satisfasse aux équations*

$$u_{tt}(t) + a_1(x, t; D)\, u_t(t) + a_2(x, t; D)\, u(t) + q(t)\, u(t)^3 = 0$$

dans

$$\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) \cap Q_T \tag{5.3}$$

et

$$u(t)\,|_{\partial\Omega \cap \tilde{\Lambda}(x_0, t_0)} = 0;$$

alors, si les données initiales $[u_0, u_1]$ *sont nulles dans* $\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) \cap (\Omega \times \{0\})$, $u(x, t)$ *est identiquement nulle dans* $\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) \cap Q_T$.

COROLLAIRE 5.2. *Supposons que deux fonctions* $u, v \in \mathscr{E}^2$ *satisfaisant à* (5.3). *Alors, si* $u(0) - v(0)$ *et* $u_t(0) - v_t(0)$ *sont nulles dans* $\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) \cap (\Omega \times \{0\})$, $u(x, t) - v(x, t)$ *est identiquement nulle dans* $\tilde{\Lambda}(x_0, t_0) \cap Q_T$.

Nous commençons

LEMME 5.3 (L'Unicité Locale). *Fixons arbitrairement un point* $y \in \bar{\Omega}$. *Soit* V *un voisinage du point* $(y, 0)$.

Si une fonction $u(x, t) \in \mathscr{E}^2$ *satisfait à*

$$u_{tt}(t) + a_1(x, t; D)\, u_t(t) + a_2(x, t; D)\, u(t) + q(t)\, u(t)^3 = 0 \qquad \textit{dans } V,$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u_t(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \textit{sur } V \cap \{t = 0\}, \tag{5.4}$$

et

$$u(t)\,|_{\partial\Omega \cap V} = 0,$$

alors il existe un voisinage W *du point* $(y, 0)$ *tel que* $u(x, t) = 0$ $\forall (x, t) \in W$.

Démonstration. Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer que $y = 0$, parce-que l'équation (5.4) est invariante par la translation $x \mapsto x - y$. Posons

$$D_\epsilon = \{(x, t) \in \Omega_y \times [0, T] : |\, x\,|^2 + t < \epsilon,\ t \geqslant 0\},$$

où ϵ est petit et $\Omega_y = \{x - y : x \in \Omega\}$.

Par la transformation de Holmgren (i.e., $t' = t + \sum_{j=1}^{3} x_j^2$ et $x_j' = x_j$), on a

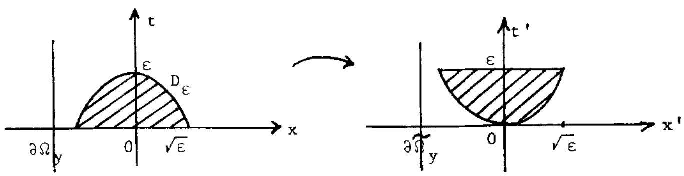
$$\begin{aligned}
&\left(1 + 4\sum_{j=1}^{3} \tilde{h}_j(x', t')\, x_j' - 4 \sum_{i,j=1}^{3} \tilde{a}_{ij}(x', t')\, x_i' x_j'\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t'^2} \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{3} \left(\tilde{h}_j(x', t') - 2 \sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_{ij}(x', t')\, x_i\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j'\, \partial t'} \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i'} \tilde{a}_{ij}(x', t') \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j'} + \tilde{q}(x', t')\, \tilde{u}^3 \\
&\quad + (\text{les termes linéaires d'ordre inférieure à } 1) = 0,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

où

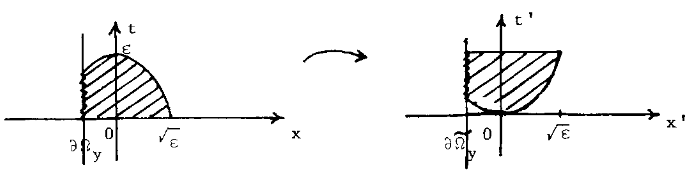
$$\tilde{u}(x', t') = u(x, t), \qquad \tilde{h}_j(x', t') = h_j(x, t), \qquad \text{etc.}$$

Le domaine D_ϵ est transformé à $\tilde{D}_\epsilon$. Pour expliquer plus facilement cette situation, nous dessinons le domaine $\tilde{D}_\epsilon$ ci-dessous.

(i) Si $D_\epsilon \cap \partial\Omega_y = \varnothing$, nous avons



(ii) Si $D_\epsilon \cap \partial\Omega_y \neq \varnothing$, nous avons



Prolongeant $\tilde{u}(x', t') = 0$ pour $(x', t') \in \tilde{\Omega}_y \times [0, \epsilon] - \tilde{D}_\epsilon$, nous avons une fonction $\tilde{u}(x', t')$ définie sur $\tilde{\Omega}_y \times [0, \epsilon]$ telle que $\tilde{u} \in \mathscr{E}^2(\tilde{\Omega}_y \times [0, \epsilon])$ et dont le support est contenu dans $\tilde{D}_\epsilon$.

Si ϵ est assez petit, l'opérateur (5.5) satisfait aux mêmes conditions (a)–(c) que celles de l'opérateur (3.1). En prolongeant convenablement les coefficients de l'opérateur (5.5) à l'extérieur de $\tilde{D}_\epsilon$, nous pouvons considérer que $\tilde{u}(x', t')$ satisfait à une équation du même type que (3.1) avec $f(t) = 0$ et

$$\tilde{u}(x', 0) = \tilde{u}_t(x', 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{u}\,|_{\partial\tilde{\Omega}_y} = 0.$$

En employant le Corollaire 3.10, nous obtenons $\tilde{u}(x', t') = 0$ dans $\tilde{\Omega}_y \times [0, \epsilon]$. Par conséquent, nous avons $u(x, t) = 0$ dans D_ϵ. Q.E.D.

COROLLAIRE 5.4. *Soit S une surface passant par le point $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$ et étant définie par $\varphi(x, t) = 0$ ($\varphi \in \mathscr{E}^4$) et satisfaisant à*

$$\varphi_t{}^2 > \lambda_{\max}^2 \sum_{i=1}^{3} \varphi_{x_i}^2 \qquad \textit{sur } S. \tag{5.6}$$

Supposons que $u(x, t) \in \mathscr{E}^2$ soit définie dans un voisinage V du point (x_0, t_0) et que $u(x, t)$ satisfasse

$$\begin{aligned} u_{tt}(t) + a_1(x, t; D)\, u_t(t) + a_2(x, t; D)\, u(t) + q(t)\, u(t)^3 &= 0 \qquad \textit{dans } V, \\ \left.\begin{aligned} u(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n_s} u(x, t) &= 0 \end{aligned}\right\} &\quad \textit{sur } S, \\ u(x, t)\,|_{\partial\Omega \cap V} &= 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

où n_S signifie la normale de S.

Alors, nous avons $u(x, t) = 0$ dans un voisinage du point (x_0, t_0).

Démonstration. Par le changement de variables $t' = \varphi(x, t)$, $x_j = x_j'$, la partie linéaire de l'équation (5.7) est transformée en l'équation

$$\begin{aligned} &\left(\varphi_t{}^2 + 2 \sum_{j=1}^{3} h_j \varphi_t \varphi_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j}\right) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2 \sum_{j=1}^{3} \left(h_j \varphi_t - \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \varphi_{x_i}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i' \, \partial t'} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i' \, \partial x_j'} + (\text{les termes d'ordre inférieur à } 1). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Grâce à la définition de $\lambda_{\max}$ et à la propriété (5.5), nous obtenons

$$\varphi_t{}^2 + 2 \sum_{j=1}^{3} h_j \varphi_t \varphi_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} > 0.$$

En remarquant que l'opérateur (5.8) satisfait aux conditions (a)–(c), nous pouvons appliquer le Lemme 5.3 au problème (5.7). Q.E.D.

Démonstration du Théorème 5.1. Soit S_θ $(0 < \theta \leqslant \lambda_{\max}^2 t_0{}^2)$ une surface définie par

$$\varphi(x, t; \theta) = \lambda_{\max}^2 (t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 - \theta = 0, \qquad t < t_0.$$

Il est évident que $\bigcup_\theta S_\theta \supset \Lambda(x_0, t_0) \cap Q_T$ et que sur S_θ, $\varphi(x, t; \theta)$ satisfait à la condition (5.6). Donc, nous appliquons le Corollaire 5.4 pour chaque S_θ.

Soit Θ un ensemble de nombre θ, $0 < \theta \leqslant \lambda_{\max}^2 t_0{}^2$ tel que, pour $\theta \in \Theta$, les données initiales de $u(x, t)$ sur S_θ sont nulles.

D'après le Lemme 5.3 et le Corollaire 5.4, Θ n'est pas vide. De plus, Θ est ouvert et fermé dans l'intervalle $(0, \lambda_{\max}^2 t_0{}^2]$. En conséquent, $\Theta = (0, \lambda_{\max}^2 t_0{}^2]$ parce que $(0, \lambda_{\max}^2 t_0{}^2]$ est connexe. Q.E.D.

6. *Le Domaine d'Influence et l'Unicité*

Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. *Supposons que $u(x, t) \in \mathscr{E}^2$ soit définie dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T$ satisfaisant à l'équation*

$$\Box u(x, t) + u(x, t)^3 = 0 \qquad \textit{dans} \qquad \Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T$$

et

$$u(x, t)\,|_{\partial_L \tilde{\Omega}_T \cap \Lambda(x^0, t^0)} = 0, \tag{6.1}$$

où

$$\Lambda(x^0, t^0) = \{(x, t);\ |\ x - x^0\ | < t^0 - t,\ t \geqslant 0\}.$$

Si les données initiales $[u_0, u_1]$ sont nulles dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap (\Omega(0) \times \{0\})$, alors $u(x, t)$ est identiquement nulle dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T$.

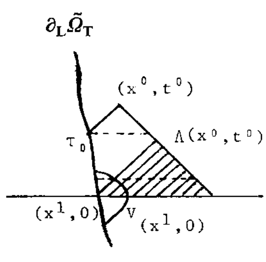
Démonstration. (i) D'après la démonstration du Théorème 5.1, il est évident que si $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L \tilde{\Omega}_T = \varnothing$, alors l'assertion est vraie. En général, si ω est un domaine contenu dans $\Omega(s)$, alors $u \equiv 0$ dans $K(\omega)$ quand $\Box u + u^3 = 0$ dans $K(\omega)$ et $[u_0, u_1]$ sont nulles sur ω, où

$$K(\omega) = \bigcup_{\substack{\{x;|x-x^1|\leqslant\rho\}\subset\omega \\ \forall x^1\in\omega, \forall\rho>0}} \{(x, t);\ |\ x - x^1\ | + |\ t - s\ | < \rho\}.$$

(ii) On suppose donc que $\underline{\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L \tilde{\Omega}_T \neq \varnothing}$. On définit un nombre τ_0 comme suit:

$$\tau_0 = \max\{t;\ (x, t) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L \tilde{\Omega}_T\}.$$

Si nous pouvons démontrer que u est nulle dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T \cap \{0 \leqslant t \leqslant \tau_0\}$, alors d'après la remarque dans (i), u est identiquement nulle dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T$.



Nous définissons un sous-ensemble I_N de $[0, \tau_0]$ comme suit:

$$I_N = \{s \in [0, \tau_0];\ u(x, t) = 0 \text{ dans } \Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T \cap \{0 \leqslant t \leqslant s\}\}.$$

Il est évident que $I_N \neq \varnothing$ parce que $I_N \ni 0$. Soit

$$(x^1, 0) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap (\partial\Omega(0) \times \{0\}).$$

D'après la Proposition 2.5, il existe un voisinage $V_{(x^1,0)}$ de $(x^1, 0)$ tel que le problème (6.1) dans $V_{(x^1,0)}$ est transformé par Φ en le problème (6.2) ci-dessous.

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\tilde{u} + a_1(y, s; D)\frac{\partial}{\partial s}\tilde{u} + a_2(y, s; D)\,\tilde{u} + \tilde{u}^3 = 0 \qquad \text{dans } \tilde{V}'$$

et

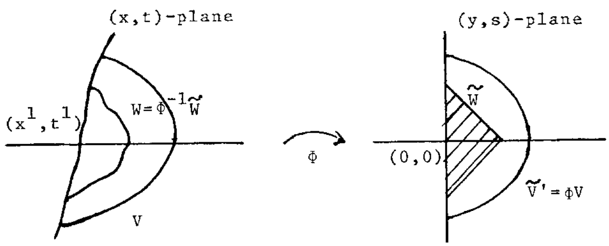
$$\tilde{u}(y, s)\,|_{\Phi(\partial_L\tilde{\Omega}_T)\cap\tilde{V}'} = 0, \tag{6.2}$$

où $\tilde{u}(y, s) = u(\Phi^{-1}(y, s))$ et les opérateurs a_1, a_2 sont définie comme suit:

$$a_1(y, s; D) = -\,2l_s(y', s)\frac{\partial}{\partial y_3}$$

et

$$\begin{aligned} a_2(y, s; D) = {} & -\frac{\partial^2}{\partial y_1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2{}^2} - (1 + l_{y_1}^2(y', s) + l_{y_2}^2(y', s) - l_s{}^2(y', s))\frac{\partial^2}{\partial y_3{}^2} \\ & - 2l_{y_1}(y', s)\frac{\partial^2}{\partial y_1\,\partial y_3} - 2l_{y_2}(y', s)\frac{\partial^2}{\partial y_2\,\partial y_3} \\ & + (l_{ss}(y', s) - l_{y_1y_1}(y', s) - l_{y_2y_2}(y', s))\frac{\partial}{\partial y_3}, \qquad y' = (y_1, y_2) \end{aligned} \tag{6.3}$$



Soit $\lambda_{\max}^{(x^1,0)}$ la vitesse maximale de la propagation du phénomène gouverné par (6.2). Alors, il existe un cône double $\tilde{W}$ tel qu'il soit contenu "complètement" dans $\tilde{V}'$, c'est-à-dire, de diamètre $(\tilde{V}' - \tilde{W}) > 0$ et de pente $\lambda_{\max}^{(x^1,0)}$. Nous définissons $W_{(x^1,0)} = \Phi^{-1}\tilde{W}$.

D'après le Théorème 5.1, nous savons que $\tilde{u}(y, s) = 0$ dans $\tilde{W}$. Donc, $u(x, t) = 0$ dans $W_{(x^1,0)}$. Parce que $\overline{\partial\Omega(0) \cap \Lambda(x^0, t^0)}$ est compact, nous avons

$$\partial\Omega(0) \cap \Lambda(x^0, t^0) \subset \bigcup_{\{x^j\}:\text{finie}} W_{(x^j,0)} .$$

Ceci implique qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que $u(x, t) = 0$ dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \Omega_T \cap \{0 \leqslant t \leqslant \epsilon\}$. D'après la même méthode, nous pouvons démontrer que I_N est ouvert.

Il est évident que I_N est fermé parce que $u(x, t) \in \mathscr{E}^2(\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T)$ et que I_N est connexe. Donc, $I_N = [0, \tau_0]$. Q.E.D.

Démonstration du Théorème A. Supposons que $u(x, t)$ et $v(x, t)$ appartenant à $\mathscr{E}^2(\tilde{\Omega}_T)$ soient deux solutions du problème (1.1).

Posons $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Alors, elle satisfait à

$$\begin{aligned} &\square w(x, t) + \alpha(x, t)\, w(x, t) = 0 \qquad \text{dans } \tilde{\Omega}_T, \\ &w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \qquad w(x, t)\,|_{\partial_L \tilde{\Omega}_T} = 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

où

$$\alpha(x, t) = u(x, t)^2 + u(x, t)\, v(x, t) + v(x, t)^2 \in \mathscr{E}^2(\tilde{\Omega}_T).$$

$\forall (x^0, t^0) \in \tilde{\Omega}_T$, nous considérons le cone $\Lambda(x^0, t^0)$. En procedant comme dans la démonstration du Théorème 6.1, nous déduisons que $w(x, t) = 0$ dans $\Lambda(x^0, t^0)$. C'est-à-dire, $u(x^0, t^0) = 0\ \forall (x, t) \in \tilde{\Omega}_T$. Q.E.D.

7. *Existence*

D'abord, nous définissons la condition de compatibilité dans le domaine noncylindrique $\tilde{\Omega}_T$.

Définition 7.1. On dit que les données initiales

$$[u_0(x), u_1(x), f(x, t)] \in \mathscr{E}^\infty(\Omega(0)) \times \mathscr{E}^\infty(\Omega(0)) \times \mathscr{E}^\infty(\tilde{\Omega}_T)$$

satisfont à la condition de compatibilité d'ordre ∞ quand les données $[\tilde{u}_0(y), \tilde{u}_1(y), \tilde{f}(y, s)]$ satisfont à la condition de compatibilité d'ordre ∞ par rapport à L. C'est-à-dire, les fonctions $\tilde{u}_p(y)$ définies par

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(y) &= u_0(y', y_3 + l(y', 0)), \qquad y' = (y_1, y_2) \\ \tilde{u}_1(y) &= u_1(y', y_3 + l(y, 0)) + l_s(y', 0) \frac{\partial}{\partial y_3} u_0(y', y_3 + l(y', 0)), \\ &\vdots \\ \tilde{u}_p(y) &= \tilde{f}^{(p-2)}(y, 0) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} \{a_2^{(k)}(y, 0; D)\, \tilde{u}_{p-k-2} + a_1^{(k)}(y, 0; D)\, \tilde{u}_{p-k-1}\}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

où

$$\tilde{f}^{(p-2)}(y, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{p-2} f(y', y_3 + l(y', s), s) \,|_{s=0}$$

$$-a_2(y, s; D) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + (1 + l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2 - l_s^2) \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - 2l_{y_1} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \, \partial y_3}$$
$$- 2l_{y_2} \frac{\partial^2}{\partial y_2 \, \partial y_3} + (l_{ss} - l_{y_1 y_1} - l_{y_2 y_2}) \frac{\partial}{\partial y_3},$$

et

$$-a_1(y, s; D) = 2l_s \frac{\partial}{\partial y_3}$$

satisfont à

$$\tilde{u}_p(y) \,|_{y_3=0} = 0 \qquad \text{pour } p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Remarque 7.2. La définition ci-dessus est très formelle. Jusqu'à maintenant, l'auteur ne peut pas trouver de définition élégante. Mais, comme elle n'exprime qu'en d'autres mots le Remarque 2 de la Section 1, il est évident que cette définition ne dépend pas du choix de L.

Démonstration du Théorème B.

Première Étape. Pour un point $(x^0, t^0) \in \tilde{\Omega}_T$ tel que

$$\Lambda(x^0, t^0) \cap (\partial\Omega(0) \times \{0\}) = \varnothing,$$

il est facile de construire une fonction $u(x, t)$ satisfaisant au problème suivant:

$$\begin{aligned} \Box u(x, t) + u(x, t)^3 &= f(x, t) && \text{dans} \quad \Lambda(x^0, t^0), \\ u(x, 0) &= u_0(x), && \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) && \text{sur} \quad \Lambda(x^0, t^0) \cap (\Omega(0) \times \{0\}). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Pour le démontrer, nous remarquons que $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T = \varnothing$ parce que $\partial_L\tilde{\Omega}_T$ satisfait à la condition (S).

Soit ω un domaine contenant $\overline{\Lambda(x^0, t^0) \cap (\Omega(0) \times \{0\})}$. Si $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont des fonctions appartenant à $C_0^\infty(\omega)$ telles que $v_0(x) = u_0(x)$ et $v_1(x) = u_1(x)$ sur $\Lambda(x^0, t^0) \cap (\Omega(0) \times \{0\})$, alors il existe une fonction $v(x, t) \in \mathscr{E}^\infty(\omega \times (0, T))$ telle que

$$\begin{gathered} \Box v(x, t) + v(x, t)^3 = g(x, t) \qquad \text{dans} \qquad \omega \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x), \qquad v_t(x, 0) = v_1(x), \\ v(x, t) \,|_{\partial\omega \times (0, T)} = 0, \end{gathered} \tag{7.4}$$

où $g(x, t) \in C_0^\infty(\omega \times [0, T])$ telle que $g(x, t) = f(x, t)$ dans $\Lambda(x^0, t^0)$.

D'après la méthode de la Section 6, la restriction de $v(x, t)$ à $\Lambda(x^0, t^0)$ est une solution unique de (7.3).

Deuxième Étape. D'abord, nous citons le lemme de Lebesgue.

LEMME 7.3 (Lebesgue's Covering Lemma). *Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert d'un sous ensemble $\mathscr{N}$ compact dans un espace métrique X, alors il existe un nombre $r > 0$ (le nombre de Lebesgue) tel que la r-boule ouverte de chaque point de $\mathscr{N}$ est contenue dans un élément de $\mathscr{U}$.*

Supposons $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T \neq \varnothing$. On définit un nombre $\tau_0 > 0$ comme à la Section 6 ($\tau_0 = \max\{t; (x, t) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T\}$).

Comme $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T$ est compact, il existe un recouvrement fini de

$$\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T \subset \bigcup_{j \in J} W_{(x^j, t^j)},$$

J: ensemble fini, $(x^j, t^j) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T$.

Donc, il existe un voisinage borné $\mathscr{V}$ de $\Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T$ tel que

$$\mathscr{V} \subset \bigcup_{j \in J} W_{(x^j, t^j)}.$$

D'après le lemme ci-dessus, il existe un nombre $r > 0$ tel que pour chaque point $(x^1, t^1) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \partial_L\tilde{\Omega}_T$, il existe k tel que

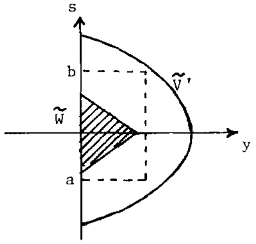
$$\{(x, t) \in \tilde{\Omega}_T; |x - x^1|^2 + |t - t^1|^2 < r^2\} \subset W_{(x^k, t^k)}.$$

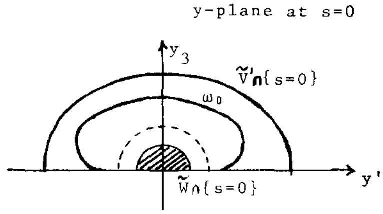
($W_{(x,t)}$ est définie à la Section 6.)

À la Section 6, nous avons supposé que $\tilde{W}$ était contenue "complètement" dans $\tilde{V}'$. Désormais, nous supposons qu'il existe un domaine $\omega_0 \subset \mathbf{R}^3$ et un intervalle $[a, b]$ tels que $\tilde{W} \subset \omega_0 \times [a, b] \subset \tilde{V}'$ où toutes les inclusions sont strictes et ω_0 vérifie que (i) $\partial\omega_0$ est régulière et (ii) $\tilde{W} \cap \{s = 0\}$ est contenue "complètement" dans ω_0.

Si les données initiales $[u_0, u_1, f(t)]$ satisfont à la condition de compatibilité d'ordre m par rapport à $\square$, alors des fonctions $[\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}(s)]$ satisfont à la condition de compatibilité d'ordre m par rapport à L sur

$$\tilde{V}' \cap \{s = 0\} \cap \{y_3 = 0\}.$$





LEMME 7.4. *Il existe des fonctions* $[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{f}(s)]$ *définies sur* ω_0 *et* $\omega_0 \times [a, b]$ *telles que* (i) *elles coïncident avec* $[\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}(s)]$ *dans* $\tilde{W}$, (ii) *elles satisfont à la condition de compatibilité d'ordre m par rapport à L, et* (iii) *elles vérifient les inégalités suivantes:*

$$\begin{aligned} \| \hat{u}_0 \|_{H^{m+2}(\omega_0)} &\leqslant c \| \tilde{u}_0 \|_{H^{m+2}(\tilde{V}_0')}, \qquad où \qquad \tilde{V}_0' = \tilde{V}' \cap \{s = 0\}, \\ \| \hat{u}_1 \|_{H^{m+1}(\omega_0)} &\leqslant c \| \tilde{u}_1 \|_{H^{m+1}(\tilde{V}_0')}, \\ \| \hat{f}(s) \|_{H^{m+2}(\omega_0 \times (a,b))} &\leqslant c \| \tilde{f}(s) \|_{H^{m+2}(\tilde{V}')}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

où la constante c ne dépend pas de fonctions.

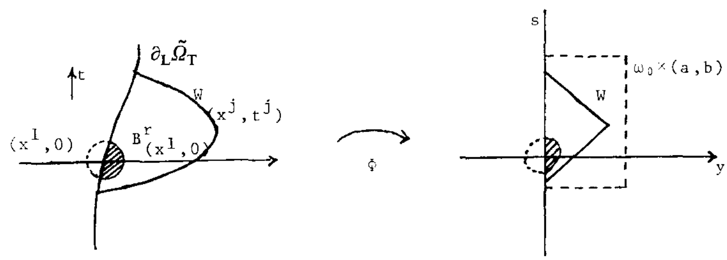
Démonstration de ce lemme sera donnée dans l'appendice.

Soit $(x^1, 0) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap (\partial\Omega(0) \times 0)$. Supposons que la r-boule de $(x^1, 0)$ est contenue dans $W_{(x^j, t^j)}$. On pose

$$B^r_{(x^1, t^1)} = \{(x, t) \in \tilde{\Omega}_T; \mid x - x^1 \mid^2 + \mid t - t^1 \mid^2 < r^2\}.$$

Nous considérons le problème suivant:

$$\begin{aligned} \Box u(x, t) + u(x, t)^3 &= f(x, t) && \text{dans} \quad B^r_{(x^1,0)}, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) && \text{sur} \quad B^r_{(x^1,0)} \cap (\Omega(0) \times \{0\}) \\ u(x, t) &= 0 && \text{sur} \quad B^r_{(x^1,0)} \cap \partial_L \tilde{\Omega}_T . \end{aligned} \tag{7.6}$$



D'après l'hypothèse de compatibilité d'ordre ∞ pour $[u_0, u_1, f(t)]$, $[\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}(s)]$ satisfont à la condition de compatibilité d'ordre ∞ sur $\tilde{V}_0' \cap \partial\Omega(0)$. Car le Lemme 7.4 nous permet d'employer les résultats de la Section 4, nous démontrons qu'il existe une solution unique $\hat{u}(y, s) \in \mathscr{E}^\infty(\omega_0 \times (a, b))$ du problème suivant:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{ss}(y, s) + a_1(y, s; D)\, \hat{u}_s(y, s) + a_2(y, s; D)\, \hat{u}(y, s) + \hat{u}(y, s)^3 & \\ = \hat{f}(y, s) \qquad \text{dans} \qquad & \omega_0 \times (a, b) \\ \hat{u}(y, 0) = \hat{u}_0(y) \qquad & \\ \hat{u}_s(y, 0) = \hat{u}_1(y) \qquad \text{sur} \qquad & \omega_0, \\ \hat{u}(y, s) = 0 \qquad \text{sur} \qquad & \partial\omega_0 . \end{aligned} \tag{7.7}$$

En définissant $u(x, t) \equiv \hat{u}(\Phi(x, t))$ pour $(x, t) \in B^{r}_{(X^1,0)}$, nous avons une solution de (7.6). De plus, par le Théorème 6.1, elle est unique sur

$$\{(x, t) \in \tilde{\Omega}_T; \mid x - x^1 \mid + t < r\}.$$

D'autre part, il existe une solution unique dans $K(\Omega(0) \cap \Lambda(x^0, t^0))$. ($K(\omega)$ est définie à la Section 6.)

Par conséquent, par recollement, nous construissons la solution dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T \cap \{0 \leqslant t \leqslant r/2\}$. (Le théorème d'unicité nous permet le recollement).

Parce que le nombre r ne dépend pas du point $(x, t) \in \Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T$, en employant le même processus $([2\tau_0/r] + 1)$-fois, nous construisons la solution dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T \cap \{0 \leqslant t \leqslant \tau_0\}$.

En appliquant le processus de la première étape, nous avons la solution dans $\Lambda(x^0, t^0) \cap \tilde{\Omega}_T$. La régularité de cette solution est évidente. Q.E.D.

Démonstration du Corollaire du Théorème B. Si Ω est borné et si $\Omega(t) = \Omega$, l'assertion est un cas spécial du Théorème 4.3 avec $a_1(x, t; D) = 0$, $a_2(x, t; D) = -\Delta$, et $q(x, t) = 1$.

Soit Ω nonborné. Si $\partial\Omega$ est compact, alors en considérant un cône basé sur $B^{\rho}_{x^0} = \{x \in \Omega; \mid x - x^0 \mid < \rho\}$ pour chaque point $x^0 \in \partial\Omega$ où ρ est assez petit, indépendant de (x^0, t^0), nous avons le résultat désiré tout de suite. Si $\partial\Omega$ n'est pas compact, alors nous supposons que $\partial\Omega$ soit "régulière uniformément de classe C^∞. (On trouve la définition de cette idée, par exemple, dans [2]. On omet de la citer ici.) Alors, nous pouvons localiser le problème "uniformément en x" et nous avons le résultat. Q.E.D.

II. "Bien Posé" dans $\mathscr{E}^\infty$

8. *Remarques sur l'Inégalité d'Énergie*

À la Section 3, nous avons établi l'inégalité d'énergie concernant au problème (3.1).

Ici, nous allons établir l'inégalité d'énergie pour le problème ci-dessous en remarquant comment les termes de l'inégalité d'énergie dépendent des coefficients de l'opérateur.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbf{R}^3$ du frontière $\partial\Omega$ assez régulière.

Soit $u(x, t)$ une solution assez régulière du problème ci-dessous:

$$\begin{gathered} u_{tt}(x, t) + a_1(x, t; D)\, u_t(x, t) + a_2(x, t; D)\, u(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \qquad u_t(x, 0) = u_1(x), \qquad u(x, t)\,|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (8.1) \end{gathered}$$

où les opérateurs $a_1(x, t; D)$ et $a_2(x, t; D)$ sont les mêmes qu'à la Section 3.

Remarque 8.1. La constante δ_6 dans (3.11) ne dépend que de δ_1,

$$\sum_{i=1}^{3} \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]} | b_i(x, t)| , \qquad \sup_{\bar{\Omega}\times[0,T]} | c(x, t)| ,$$

et

$$\sup_{\bar{\Omega}\times[0,T]} \left| h(x, t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h_i(x, t)}{\partial x_i} \right| .$$

En effet, par integration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} |(A(t)\, U, U)_{\mathscr{H}(t)} | = (u, v) - \left(\sum_{i=1}^{3} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)\, u, v\right) \\ + \left(\left(h(x, t) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h_i(x, t)}{\partial x_i}\right) v, v\right), \end{aligned} \tag{8.2}$$

où $U = \{u, v\} \in \mathbf{D}$.

Nous introduisons la notation ci-dessous pour une fonction arbitraire $g(x, t)$ définie sur $\bar{\Omega} \times [0, T]$:

$$\| g(\cdot, t)\|_{(m)}^{(l)} = \sum_{j=1}^{l} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j g(\cdot, t) \right|_{\mathscr{B}^m(\bar{\Omega})} . \tag{8.3}$$

PROPOSITION 8.2. *Soit* $u(t) \in \mathscr{E}_t^{\,2}(L^2(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^{\,1}(H^1(\Omega)) \cap \mathscr{E}_t^{\,0}(H^2(\Omega))$ *une solution du problème* (8.1). *Alors, nous avons*

$$E_1(t) \leqslant C_1 \left\{E_1(0) + \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds\right\} , \tag{8.4}$$

où $E_1(t)$ *est définie par* (3.28) *et* C_1 *est une constante ne dépendant que de* δ_1,

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \int_0^t \| a_{ij}(s)\|_{(0)}^{(1)}\, ds, \qquad \max_{1\leqslant j\leqslant 3} \int_0^t \| b_j(s)\|_{(0)}^{(0)}\, ds,$$

$$\int_0^t \| c(s)\|_{(0)}^{(0)}\, ds, \qquad \text{et} \qquad \int_0^t \left| h(s) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial h_j(s)}{\partial x_j} \right|_{(0)}^{(0)} ds,$$

et indépendante de $u(t)$.

La démonstration est évidente.

PROPOSITION 8.3. *La constante* α_m *dans* (3.27) *ne dépend que de* δ_1,

$$\max_{i,j,t} \| a_{ij}(t)\|_{(m+1)}^{(0)} , \qquad \max_{i,j,t} \| a_{ij}(t)\|_{(0)}^{(1)} , \qquad \max_{j,t} \| b_j(t)\|_{(m)}^{(0)} ,$$

$$\max_{t} \| c(t)\|_{(m)}^{(0)} , \qquad \max_{j,t} \| h_j(t)\|_{(m)}^{(0)} ,$$

et λ_0.

Démonstration. Considérons l'équation en U:

$$(\lambda_0 I - A(t))\, U = F, \tag{8.5}$$

c'est-à-dire,

$$u - v = f_1 \qquad \text{et} \qquad a_2(t)\, u + (a_1(t) + \lambda_0)\, v = f_2\,, \tag{8.6}$$

où

$$\{f_1\,, f_2\} \in (H^m(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \times H^{m-1}(\Omega).$$

La substitution de la première relation $v = \lambda_0 u - f_1$ de (8.6) dans la deuxième donne

$$a_{\lambda_0}(t)\, u \equiv (a_2(t) + \lambda_0 a_1(t) + \lambda_0{}^2)\, u = (a_1 + \lambda_0) f_1 + f_2 \in H^{m-1}(\Omega). \tag{8.9}$$

L'équation (8.7) est un problème elliptique avec le paramètre t.

Nous citons ici l'estimation à priori.

THÉORÈME. *Soit l'opérateur $\mathscr{M}(t)$ donné par*

$$\mathscr{M}(t) = \sum \alpha_{ij}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum \beta_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma(t), \qquad t\text{: paramètre} \tag{8.8}$$

avec la constante d'ellipticité $\delta_1 > 0$.

Si les coefficients $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_j(t)$, et $\gamma(t) \in \mathscr{E}^m(\Omega)$, si $\alpha_{ij}(t)$ est "equicontinu" en t, et si $u \in H^{m+2}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, alors nous avons

$$\| u \|_{m+2} \leqslant C(\| \mathscr{M}(t)\, u \|_m + \| u \|_0), \tag{8.9}$$

où C ne dépend que de δ_1,

$$\max_x \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ i,j}} | D_x{}^\alpha \alpha_{ij} |\,, \qquad \max_x \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ j}} | D_x{}^\alpha \beta_j |\,,$$

et

$$\max_x \sum_{|\alpha| \leqslant m} | D_x{}^\alpha \gamma |\,.$$

(*Voir, par exemple,* 2, 14].)

En employant le théorème ci-dessus, nous avons établi la démonstration de la proposition. Q.E.D.

THÉORÈME 8.4. *Soit*

$$u(t) \in \bigcap_{k=0}^{m+2} \mathscr{E}_t{}^k(H^{m+2-k}(\Omega))$$

une solution du problème (8.1). *Alors, nous avons, pour l entier $m \geqslant l \geqslant 0$,*

$$E_{l+2}(t) \leqslant C \left\{ \| u_0 \|_{l+2} + \| u_1 \|_{l+1} + \sum_{k=0}^{l} \| f^{(k)}(0) \|_{l-k} + \sum_{k=1}^{l} \int_0^T \| f^{(k)}(s) \|_{l+1-k}\, ds \right\}, \tag{8.10}$$

où C ne dépend que de δ_1,

$$\max_{i,j,t} \| a_{ij}(t) \|_{(0)}^{(1)}, \qquad \max_{i,j,t} \| a_{ij}(t) \|_{(3)}^{(0)}, \qquad \max_{j,t} \| b_j(t) \|_{(2)}^{(0)},$$
$$\max_{t} \| c(t) \|_{(2)}^{(0)}, \qquad \max_{j,t} \| h_j(t) \|_{(2)}^{(0)}, \qquad \textit{et} \qquad \max_{t} \| h(t) \|_{(2)}^{(0)}.$$

Démonstration. Nous procédons comme dans la démonstration du Théorème 3.13; en remarquant la dépendance des coefficients, nous avons le résultat désiré. Q.E.D.

THÉORÈME 8.5. *Sous la même hypothèse, nous avons*

$$\sum_{j=0}^{l+2} \| u^{(j)}(t) \|_{l+2-j}$$
$$\leqslant C \left\{ \| u_0 \|_{l+2} + \| u_1 \|_{l+1} + \sum_{k=0}^{l} \| f^{(k)}(0) \|_{l-k} + \sum_{k=1}^{l} \int_0^T \| f^{(k)}(s) \|_{l+1-k}\, ds \right\}, \tag{8.11}$$

où la constante C ne dépend que de δ_1,

$$\max_{i,j,t} \| a_{ij}(t) \|_{(0)}^{(1)}, \qquad \max_{i,j,t} \| a_{ij}(t) \|_{(l+3)}^{(0)}, \qquad \max_{j,t} \| b_j(t) \|_{(l+2)}^{(0)},$$
$$\max_{t} \| c_j(t) \|_{(l+2)}^{(0)}, \qquad \max \| h_j(t) \|_{(l+2)}^{(0)}, \qquad \textit{et} \qquad \max \| h(t) \|_{(l+2)}^{(0)}.$$

Démonstration. Comme ci-dessus. Q.E.D.

9. *Démonstration du Théorème* C

Soient $u(t)$ et $v(t)$ des solutions respectivement du problème (1.1) pour les données $[u_0, u_1, f(t)]$ et $[v_0, v_1, g(t)]$.

Alors, en posant $w(t) = u(t) - v(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} &\square w(t) + \alpha(x,t)\, w(t) = f(t) - g(t) \equiv h(t) && \text{dans} \quad \tilde{\Omega}_T, \\ &w(0) = u_0 - v_0 \equiv w_0 && \text{sur} \quad \Omega(0), \\ &w_t(0) = u_1 - v_1 \equiv w_1 && \\ &w(t) = 0 && \text{sur} \quad \partial_L \tilde{\Omega}_T, \end{aligned} \tag{9.1}$$

où

$$\alpha(x, t) = u(x, t)^2 + u(x, t)\, v(x, t) + v(x, t)^2.$$

Soit K un ensemble compact arbitraire dans $\tilde{\Omega}_T$. Nous définissons $\Lambda(K)$ par

$$\Lambda(K) = \bigcup_{(x^0, t^0) \in K} \{(x, t); |x - x^0| < t^0 - t, t \geqslant 0\}. \tag{9.2}$$

Premier Cas: $\partial_L \tilde{\Omega}_T \cap \Lambda(K) = \varnothing$. Posons $\Lambda^0(K) = \Lambda(K) \cap \{t = 0\}$. Soit Ω_0 un domaine borné qui contient complètement $\Lambda^0(K)$; i.e.,

$$\overline{\Lambda^0(K)} \subset \Omega_0 \subset \Omega(0).$$

D'après le Lemme 3.3, il existe des fonctions $\hat{u}_0$, $\hat{u}_1$, et $\hat{f}(t)$ qui sont des prolongements respectivement des fonctions $u_0|_{\Lambda^0(K)}$, $u_1|_{\Lambda^0(K)}$, $f(t)|_{\Lambda(K)}$ ($\cdot|_\omega$ signifie la restriction sur ω), vérifiants aux inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \| \hat{u}_0 \|_{H^{l+2}(\Omega_0)} &\leqslant C \| u_0 \|_{H^{l+2}(\Lambda^0(K))}, \\ \| \hat{u}_1 \|_{H^{l+1}(\Omega_0)} &\leqslant C \| u_1 \|_{H^{l+1}(\Lambda^0(K))}, \\ \| \hat{f}(t) \|_{H^{l+1}(\Omega_0 \times (0,T))} &\leqslant C \| f(t) \|_{H^{l+1}(\Lambda(K))}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

et $[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{f}(t)]$ satisfaisant à la condition de compatibilité d'ordre l. (Concernant l'existence des ces prolongements, voir l'appendice.)

Nous considérons le problème suivant:

$$\begin{aligned} \Box \hat{u}(t) + \hat{u}(t)^3 &= \hat{f}(t) && \text{dans} \quad \Omega_0 \times (0, T), \\ \hat{u}(0) &= u_0 && \\ \hat{u}_t(0) &= u_1 && \text{sur} \quad \Omega_0, \\ \hat{u}(t) &= 0 && \text{sur} \quad \partial\Omega_0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

En employant le Théorème 3.16, avec $a_1(x, t; D) = 0$, $a_2(x, t; D) = -\Delta$, et $q(x, t) = 0$, nous avons

$$\| \hat{u}(t) \|_{H^{l+2}(\Omega_0)} \leqslant C_{l+2}, \tag{9.5}$$

où la constante C_{l+2} dépend que de

$$\| \hat{u}_0 \|_{H^{l+2}(\Omega_0)} + \| \hat{u}_1 \|_{H^{l+1}(\Omega_0)} + \sum_{k=0}^{l} \| \hat{f}^{(k)}(0) \|_{H^{l-k}(\Omega_0)}$$
$$+ \sum_{k=0}^{l+1} \int_0^T \| \hat{f}^{(k)}(s) \|_{H^{l+1-k}(\Omega_0)}\, ds.$$

Nous prolongeons $[v_0, v_1, g(t)]$ par la même manière. En posant,

$$\hat{w}(t) = \hat{u}(t) - \hat{v}(t),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
&\square \hat{w}(t) + \hat{\alpha}(t)\,\hat{w}(t) = \hat{f}(t) - \hat{g}(t) \equiv \hat{h}(t) && \text{dans} \quad \Omega_0 \times (0, T),\\
&\hat{w}(0) = \hat{u}_0 - \hat{v}_0 \equiv \hat{w}_0 && \\
&\hat{w}_t(0) = \hat{u}_1 - \hat{v}_1 \equiv w_1 && \text{sur} \quad \Omega_0, \\
&\hat{w}(t) = 0 && \text{sur} \quad \partial\Omega_0 .
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Alors, en employant les résultats de la Section 8, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l} \| \hat{w}^{(k)}(t)\|_{H^{l-k}(\Omega_0)} \\
&\quad \leqslant C \Big\{ \| \hat{w}_0 \|_{H^l(\Omega_0)} + \| \hat{w}_1 \|_{H^{l-1}(\Omega_0)} + \sum_{k=0}^{l-2} \| \hat{h}^{(k)}(0)\|_{H^{l-2-k}(\Omega_0)} \\
&\quad\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \int_0^T \| \hat{h}^{(k)}(s)\|_{H^{l-1-k}(\Omega_0)}\, ds \Big\},
\end{aligned} \tag{9.7}$$

où la constante C ne dépend que de $\max_t \| \hat{\alpha}(t)\|_{(l)}^{(0)}$.

En employant le théorème de Sobolev, nous avons

$$\begin{aligned}
\| \hat{\alpha}(t)\|_{(l)}^{(0)} \equiv | \hat{\alpha}(t)|_{\mathscr{E}^l(\bar{\Omega}_0)} &\leqslant (| \hat{u}(t)|_{\mathscr{E}^l(\bar{\Omega}_0)} + | \hat{v}(t)|_{\mathscr{E}^k(\bar{\Omega}_0)})^2 \\
&\leqslant C_{\Omega_0}(\| \hat{u}(t)\|_{H^{l+2}(\Omega_0)} + \| \hat{v}(t)\|_{H^{l+2}(\Omega_0)})^2,
\end{aligned} \tag{9.8}$$

où C_{Ω_0} est une constante dépendante de Ω_0.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
&\max_{\substack{(x,t)\in K \\ |\alpha| \leqslant l-2}} | D^{\alpha}_{(x,t)} w(x, t)| \\
&\quad \leqslant C \max_t \sum_{k=0}^{l} \| \hat{w}^{(k)}(t)\|_{H^{l-k}(\Omega_0)} \\
&\quad \leqslant C' \{ | w_0(x)|_{\mathscr{E}^l(\overline{\Lambda^0(K)})} + | w_1(x)|_{\mathscr{E}^l(\overline{\Lambda^0(K)})} + | h(x, t)|_{\mathscr{E}^{l-1}(\overline{\Lambda(K)})} \},
\end{aligned} \tag{9.9}$$

où la constante C' dépend de K, Ω_0, T, et

$$\begin{aligned}
&| u_0(x)|_{\mathscr{E}^{l+2}(\overline{\Lambda^0(K)})} + | u_1(x)|_{\mathscr{E}^{l+1}(\overline{\Lambda^0(K)})} + | f(x, t)|_{\mathscr{E}^{l+1}(\overline{\Lambda(K)})} \\
&+ | v_0(x)|_{\mathscr{E}^{l+2}(\overline{\Lambda^0(K)})} + | v_1(x)|_{\mathscr{E}^{l+1}(\overline{\Lambda^0(K)})} + | g(x, t)|_{\mathscr{E}^{l+1}(\overline{\Lambda(K)})} .
\end{aligned}$$

Deuxième Cas: $\partial_L\tilde{\Omega}_T \cap \Lambda(K) \neq \varnothing$. Nous définissons encore

$$\Lambda^0(K) = \Lambda(K) \cap (\Omega(0) \times \{0\}),$$

et nous utilisons de même notations qu'à la Section 7.

Soit $(x^1, 0) \subset \partial_L\tilde{\Omega}_T \cap \partial\Lambda^0(K)$. Nous considérons la boule $B^r_{(x^1,0)}$.

Comme dans la démonstration du Théorème B, il suffit de considérer le problème suivant:

$$\begin{aligned} L\hat{w}(y,s) + \hat{\alpha}(y,s)\,\hat{w}(y,s) &= \hat{f}(y,s) && \text{dans} && \omega_0 \times (a,b), \\ \hat{w}(y,0) &= \hat{w}_0(y) && \text{sur} && \omega_0, \\ \hat{w}_s(y,0) &= \hat{w}_1(y) && && \\ \hat{w}(y,s) &= 0 && \text{sur} && \partial\omega_0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

En procédant comme à la Section 7, nous pouvons estimer les valeurs de $w(x, t)$ et $w_t(x, t)$ sur $B^r_{(x^1,0)} \cap \{t = r/2\}$.

Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned} &|\,w(x,t)|_{\mathscr{E}^{m+1}(\overline{B^r_{(x^1,0)}\cap\{t=r/2\}})} + |\,w_t(x,t)|_{\mathscr{E}^m(\overline{B^r_{(x^1,0)}\cap\{t=rt2\}})} \\ &\qquad \leqslant C\{|\,w_0(x)|_{\mathscr{E}^{m+3}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,w_1(x)|_{\mathscr{E}^{m+2}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,h(x,t)|_{\mathscr{E}^{m+1}(\overline{\Lambda(K)})}\}, \end{aligned} \tag{9.11}$$

où la constante C ne dépend que de

$$\begin{aligned} &|\,u_0(x)|_{\mathscr{E}^{m+5}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,u_1(x)|_{\mathscr{E}^{m+4}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,f(x,t)|_{\mathscr{E}^{m+4}(\overline{\Lambda(K)})} \\ &\qquad + |\,v_0(x)|_{\mathscr{E}^{m+5}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,v_1(x)|_{\mathscr{E}^{m+4}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,g(x,t)|_{\mathscr{E}^{m+4}(\overline{\Lambda(K)})}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} &|\,w(x,t)|_{\mathscr{E}^m(\overline{\Lambda(K)\cap\{0\leqslant t\leqslant r/2\}})} \\ &\qquad \leqslant C\{|\,w_0(x)|_{\mathscr{E}^{m+2}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,w_1(x)|_{\mathscr{E}^{m+1}(\overline{\Lambda^0(K)})} + |\,h(x,t)|_{\mathscr{E}^{m+1}(\overline{\Lambda(K)})}\}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

où la constante C ne dépend que de $\partial_L\tilde{\Omega}_T$, T, et

$$|\,u_0(x)|_{\mathscr{E}^{m+5}(\overline{\Lambda^0(K)})} + \cdots + |\,g(x,t)|_{\mathscr{E}^{m+4}(\overline{\Lambda(K)})}.$$

En employant cette inégalité $([2\tau_0/\gamma] + 1)$-fois, nous avons le résultat désiré où

$$\tilde{K} = \overline{\Lambda(K)}, \qquad \tilde{K}_0 = \overline{\Lambda^0(K)}, \qquad \text{et} \qquad N = 4([2\tau_0/r] + 1).$$

Q.E.D.

Appendice

Démonstration du Lemme 7.4. Nous pouvons supposer que

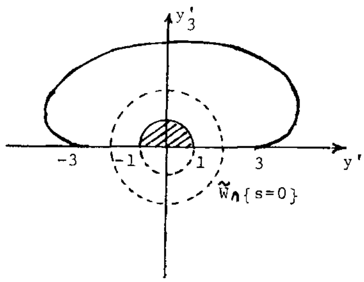
$$\tilde{W} \cap \{s = 0\} = \{y; y_3 \geqslant 0, |y| < 1\},$$

et que

$$\partial\omega_0 \cap \{y_3 = 0\} = \{y'; |y| < 3\}$$

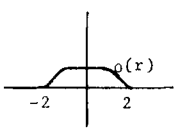
et que

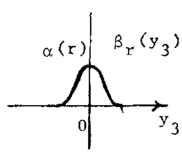
$$\overline{\tilde{B}_2 \cap \{y_3 > 0\}} \subset \omega_0 .$$



Proposition A.1. *Il existe une fonction* $\alpha(y) \in \mathscr{E}^\infty(\tilde{B}_2)$ *telle que* (i) $\alpha(y) = 1$ *sur* $\tilde{B}_1$, (ii) $\alpha(y) \in \mathring{H}^l(\tilde{B}_2)$, *et* (iii) $(\partial/\partial y_3)^j\, \alpha(y', 0) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$, *où* $\tilde{B}_j = \{y; |y| < j\}$.

Démonstration. Il est évident qu'il existe une fonction $\rho(r) \in \mathscr{E}^\infty[-2, 2]$ telle que (a) $\rho(r) = 1$ sur $[-1, 1]$ et (b) $(d/dr)^k\, \rho(r) = 0$ $\forall k \geqslant 0$ et $r = -2$ ou 2. Nous définissons une fonction $\beta_r(y_3)$ (r: paramètre) vérifiant (i) $\beta_r(y_3) \in C_0^\infty(-\sqrt{2 - r^2}, \sqrt{2 - r^2})$, (ii) $(d/dy_3)^k\, \beta_r(y_3) = 0$ $\forall k > 0, \forall r$, et $y_3 = 0$, (iii) $\beta_r(0) = \rho(r)$ et (iv) $\beta_r(y_3)$ dépend régulièrement de r.





Poser

$$\alpha(y) = \beta_{|y'|}(y_3). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Alors, nous définissons $\hat{u}_0(y)$ comme suit:

$$\hat{u}_0(y) = \begin{cases} \alpha(y)\, \tilde{u}(y), & y \in \tilde{B}_2 \cap \{y_3 \geqslant 0\} \\ 0, & y \in \omega_0 - (\tilde{B}_2 \cap \{y_3 \geqslant 0\}). \end{cases} \tag{A.1}$$

Les autres fonctions $\hat{u}_1(y)$ et $\hat{f}(y, s)$ sont définies de la même manière.

La condition de compatibilité d'ordre m signifie que

$$\tilde{u}_p(y) = 0 \qquad \text{sur} \qquad y_3 = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \leqslant m, \tag{A.2}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(y) &= \tilde{f}^{(p-2)}(y, 0)\\ &\quad - \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} \{a_2^{(k)}(y, 0; D)\, \tilde{u}_{p-k-2} + a_1^{(k)}(y, 0; D)\, \tilde{u}_{p-k-1}\},\\ \tilde{u}_0(y) &= u_0(y', y_3 + l(y', 0)),\end{aligned}$$

et

$$\tilde{u}_1(y) = u_1(y', y_3 + l(y', 0)) + l_s(y', 0)\, (\partial/\partial y_3)\, u_0(y', y_3 + l(y', 0)).$$

Il est évident que $\hat{u}_0(y) = 0$ et $\hat{u}_1(y) = 0$ sur $\partial\omega_0$.

Nous calculons comme suit.

$$\begin{aligned}&\hat{f}^{(1)}(y, 0) - a_2(y, 0; D)\, \hat{u}_0(y) - a_1(y, 0; D)\, \hat{u}_1(y)\, |_{\{y_3=0\}\cap\partial\omega_0}\\ &\quad = \alpha(y)\, \tilde{u}_3(y)\, |_{y_3=0} + (1 + l_{y_1}^2 + l_{y_2}^2 - l_s^2)\\ &\qquad \times \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)^2 \alpha(y)\, \tilde{u}_0(y) + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right) \alpha(y) - \left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right) \tilde{u}_0(y)\right\}\Big|_{y_3=0} + \cdots .\end{aligned}$$

Alors, par la définition de $\alpha(y)$, nous avons $\hat{u}_3(y) = 0$ sur $\partial\omega_0$. De plus, nous avons $\hat{u}_p(y) = 0$ sur $\partial\omega_0$ pour $p \leqslant m$. Q.E.D.

Acknowledgments

J'adresse mes remerciements à mes collègues, M. Ikawa, C. Bardos, A. Yamada, et K. Asano. J'ai reçu des plusieurs conseils à M. Ikawa quand nous étions ensemble en France. C. Bardos a corrigé plusieures fois mon français. A. Yamada m'a enseigné à l'existence du lemme de Lesbesgue et K. Asano m'a donné quelque idée de la démonstration de la proposition A.1.

Bibliographie

1. S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, *Commun. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623–727.
2. F. E. Browder, On the spectral theory of elliptic differential operators. I, *Math. Ann.* **142** (1961), 22–130.
3. F. E. Browder, On nonlinear wave equations, *Math. Z.* **80** (1962), 249–264.

4. J. COOPER ET C. BARDOS, A nonlinear wave equation in a time dependent domain," University of Maryland, Technical Report, 1971.
5. J. COOPER ET L. A. MEDEIROS, The Cauchy problem for non linear wave equations in domains with moving boundary, *Natas Fis.* **17** (1971), 287–298.
6. M. IKAWA, Mixed problems for hyperbolic equations of second order, *J. Math. Soc. Japan* **20** (1968), 580–608.
7. M. IKAWA, On the mixed problem for hyperbolic equations of second order with the Neumann boundary condition, *Osaka J. Math.* **7** (1960), 203–223.
8. A. INOUE, Another construction of a weak solution for $u_{tt} - \Delta u + u^p = 0$, preprint.
9. A. INOUE, Sur l'opérateur d'onde et de scattering pour $\Box$ dans un domaine noncylindrique, à paraître.
10. A. INOUE, L'opérateur d'onde et de la diffusion pour un système évolutif $(d/dt) + iA(t)$, à paraître.
11. A. INOUE, Sur $\Box u + u^3 = f$ dans un domaine noncylindrique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **275** (1972), 659–662.
12. K. JÖRGENS, "Das Anfangswert Problem im Grossen für eine Klasse nichtlinear Wellelgleichungen."
13. J. L. KELLEY, "General Topology," Van Nostrand, New York, 1955.
14. J. L. LIONS, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires," Dunod, Paris, 1969.
15. J. L. LIONS ET E. MAGENES, "Problèmes aux Limites Nonhomogènes et Applications," Vols. 1, 2, Dunod, Paris 1968.
16. C. MIRANDA, "Partial Differential Equations of Elliptic Type," Springer, Berlin.
17. S. MIZOHATA, "Théorie des Équations Dérivées Partielles" (en Japonais), Iwanami, Tokyo, 1965.
18. J. SATHER, The existence of a global classical solution of the initial boundary value problem for $\Box u + u^3 = f$, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **22** (1966), 292–307.
19. I. SEGAL, The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction, *Bull. Soc. Math. France* **91** (1963), 129–135.
20. I. SEGAL, Dispersion for nonlinear relativistic equations. II, *Ann. Sci. Eco. Nor. Suppl.* **1** (1968), 459–497.
21. W. A. STRAUSS, On weak solutions of semilinear hyperbolic equations, *Ann. Acad. Bras. Ciên.* **42** (1970), 645–651.
22. K. YOSIDA, "Functional Analysis," Springer, Berlin, 1965.